

Değişken Çekirdekli Kaba Kesirli Maksimal Operatörlerin Komütatörleri için Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Lipschitz Tipi Tahminler

Ferit Gürbüz¹

Özet

Bu çalışmada, değişken çekirdeklere sahip kaba kesirli maksimal operatörlerce üretilen komütatörlerin değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki sınırlılık özellikleri incelenmektedir. Harmonik analiz yöntemleri, değişken üslü fonksiyon uzaylarına ait modüler eşitsizliklerle birleştirilerek, uygun çekirdek ve üslü koşulları altında bu komütatörler için Lipschitz tipinde tahminler elde edilmektedir. Elde edilen sonuçlar, hem klasik hem de değişken üslü Lebesgue uzaylarında bilinen çeşitli sınırlılık sonuçlarını genelleştirmekte ve iyileştirmektedir. Özellikle, değişken çekirdekler ile kesirli yapı ve standart olmayan büyüme koşulları arasındaki etkileşimin komütatörlerin sürekliliği üzerindeki etkisi ortaya konulmaktadır.

1 Giriş ve Ön Bilgiler

Harmonik analizde maksimal operatörler ve bunların komütatörleri, fonksiyon uzaylarının yapısını ve düzenlilik özelliklerini anlamada temel araçlar arasında yer almaktadır. Özellikle kesirli maksimal operatörler, potansiyel teorisi ve kısmi diferansiyel denklemlerle olan güçlü bağlantıları nedeniyle uzun süredir yoğun biçimde incelenmektedir. Klasik çalışmalar, bu operatörlerin Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılık özelliklerini ortaya koymuş; daha sonraki araştırmalar ise bu sonuçların daha genel fonksiyon uzaylarına nasıl taşınabileceğini ele almıştır.

Son yıllarda $L^{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları, standart olmayan büyüme koşullarını modelleyebilme yetenekleri sayesinde büyük ilgi görmüştür. Özellikle elektroteorolojik akışkanlar, doğrusal olmayan elastisite ve görüntü işleme gibi alanlarda ortaya çıkan problemler, sabit üslü uzayların ötesine geçilmesini zorunlu kılmaktadır. Bu nedenle, klasik harmonik analiz operatörlerinin değişken üslü ortamlardaki davranışlarının incelenmesi hem kuramsal hem de uygulamalı açıdan önemlidir.

Bu çalışmada, değişken çekirdeklere sahip kaba kesirli maksimal operatörler tarafından üretilen komütatörlerin değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki sınırlılık ve süreklilik özellikleri ele alınmaktadır. Amaç, uygun çekirdek ve üslü koşulları altında bu komütatörler için Lipschitz tipinde tahminler elde etmek ve bilinen klasik sonuçları daha genel bir çerçevede genişletmektir.

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X

$\mathbb{R}^n$ üzerinde normalize edilmiş Lebesgue ölçüsü $d\sigma(x')$ ile donatılmış birim küre S^{n-1} ($n \geq 2$) olsun.

Eğer Ω aşağıdaki koşulları sağlıyorsa:

1. Her $x, z \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda > 0$ için

$$\Omega(x, \lambda z) = \Omega(x, z);$$

2. Her $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için $\theta = z/|z|$ olmak üzere

$$\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^s(S^{n-1})} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \theta)|^s d\sigma(\theta) \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $\Omega(x, z)$ fonksiyonunun, $s > 1$ için

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^s(S^{n-1})$$

sınıfına ait olduğu söylenir.

Bu çalışmanın ana sonucunu sunmadan önce, bazı gerekli tanım ve gösterimleri (notasyonları) hatırlatalım.

$0 < \beta \leq 1$ için, $\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz uzayı

$$\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{\text{Lip}_\beta} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n; x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

$0 < \alpha < n$ olmak üzere, değişken çekirdeğe sahip kaba kesirli maksimal operatör, uygun bir çekirdek fonksiyonu Ω yardımıyla tanımlanır. Çekirdeğin düzgünlük varsayımlarının zayıflatılması, daha genel ve gerçekçi modellerin ele alınmasına imkân tanır.

$b \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, bir Lipschitz fonksiyonu b ile ilişkili komütatör,

$$[b, M_{\Omega, \alpha}]f(x) = b(x)M_{\Omega, \alpha}f(x) - M_{\Omega, \alpha}(bf)(x)$$

şeklinde tanımlanır. Bu kaba kesirli maksimal operatörün b ile olan etkileşimini ölçen $M_{\Omega, b, \alpha}$ komütatör operatörü

$$M_{\Omega, b, \alpha}f(x) := \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \int_{B(x, r)} |\Omega(x, x-y)| |b(x) - b(y)|^m |f(y)| dy$$

şeklindeki ifade ile tanımlanır, burada $0 < \alpha < n$ ve f uygun bir fonksiyondur. Bu tür komütatörler, fonksiyonların yerel düzenliliğini incelemede önemli rol oynar ve Lipschitz uzaylarıyla yakından ilişkilidir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \dots$, $\mathbb{R}^n$ uzayının noktaları olsun. n boyutlu $\mathbb{R}^n$ alışılmış Öklid uzayı; $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$, $\mathbb{R}^n$ de alışılmış iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile tüm $x = (x_1, \dots, x_n)$ noktalarının kümesidir, burada $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ dir.

x' ile her zaman x e karşılık gelen birim vektörünü kastedeceğiz, yani, herhangi bir $x \neq 0$ için $x' = \frac{x}{|x|}$ dir.

• $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, n boyutlu $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ Öklid uzayında birim küreyi ve dx' ise onun yüzey ölçüsünü temsil eder.

• Ölçülebilir bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için, $|E|$ ve χ_E ile sırasıyla Lebesgue ölçüsünü ve karakteristik fonksiyonu göstereceğiz.

• $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ merkezi x , yarıçapı $r > 0$ olan açık yuvarı ve $B(x, r)^c$ ise onun tümleyenini ifade etsin. $v_n = |B(0, 1)| = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $\tilde{B}(x, r) = B(x, r) \cap E$ olmak üzere $B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü

$$|B(x, r)| = v_n r^n$$

biçimindedir.

• C , açıkça ifade edilmeksizin her bir ifadedeki değerini değiştirebilen pozitif bir sabiti ifade eder. Bu çalışma boyunca C farklı sabitleri gösterecektir.

• $p'(\cdot)$ ve $s'(\cdot)$ üsleri her zaman herhangi $1 < p(x) < \infty$ ve $1 < s(x) < \infty$ üslerinin konjuge indekslerini gösterir, yani $\frac{1}{p'(x)} := 1 - \frac{1}{p(x)}$ ve $\frac{1}{s'(x)} := 1 - \frac{1}{s(x)}$ dir.

• $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p_-(\mathbb{R}^n) := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$ ve $p_+(\mathbb{R}^n) := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$ olmak üzere $1 \leq p_-(\mathbb{R}^n) \leq p_+(\mathbb{R}^n) < \infty$ olduğunu varsayalım. Sonuç olarak, bu notasyonları ($p_-(\mathbb{R}^n)$ ve $p_+(\mathbb{R}^n)$) kullanarak, aşağıdaki gibi bir değişken üs sınıflarını tanımlayabiliriz:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{p(\cdot) \text{ ölçülebilir} : 1 \leq p_- \leq p(\cdot) \leq p_+ < \infty\}$$

ve

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{p(\cdot) \text{ ölçülebilir} : 0 < p_- \leq p(\cdot) \leq p_+ < \infty\}.$$

Eğer ölçülebilir $p(\cdot)$ fonksiyonu

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x-y|)}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, C > 0 \quad (1)$$

ve

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}, \quad p_\infty \in \mathbb{R}, C > 0 \quad (2)$$

koşullarını sağlarsa, bu $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna global olarak log-Hölder sürekli adı verilir. (1) ve (2) koşullarını sağlayan $p(\cdot)$ lerin kümesi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

• Değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik L^p uzaylarının esnek bir genellemesidir ve konuma bağlı değişken integralleştirilebilirlik gereksinimlerini modellemek için kullanılır. Hem matematiksel analizde hem de uygulamalı bilimlerde önemli bir araçtır. Klasik Lebesgue uzaylarında norm, sabit bir $p \in [1, \infty)$ üssüne bağlıdır. Değişken üslü Lebesgue

uzaylarında ise integralleştirilebilirlik derecesi uzayın her noktasında değişebilir. Bunun için ölçülebilir bir fonksiyon olan $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ alınır ve aşağıdaki fonksiyonel tanımlanır:

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx.$$

Bu durumda, değişken üslü Lebesgue uzayının normu şu şekilde verilir:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left\{ \eta > 0: \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\}.$$

Buradan, değişken üslü Lebesgue uzayı

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir: } \rho_{p(\cdot)}(f) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzay uygun koşullar altında bir Banach uzayıdır. Bu uzay, klasik L^p uzaylarının doğal bir genellemesidir:

Değişken üslü Lebesgue uzayında integrandın davranışı şu özellik ile belirlenir:

$$|f(x)|^{p(x)}.$$

Burada $p(x)$ büyüdükçe, üs etkisi şu şekilde değişir:

1. Eğer $|f(x)| < 1$ ise:

$$p_1 < p_2 \Rightarrow |f(x)|^{p_2} < |f(x)|^{p_1}.$$

Dolayısıyla, küçük değerler daha yüksek üs altında **daha hızlı sıfıra yaklaşır**.

Bu durum literatürde genellikle şu şekilde ifade edilir:

"Birimden küçük genlikler, büyük üslere karşı daha güçlü şekilde bastırılır."

2. Eğer $|f(x)| > 1$ ise:

$$p_1 < p_2 \Rightarrow |f(x)|^{p_2} > |f(x)|^{p_1}.$$

Bu da fonksiyonun büyük genliklerinin, yüksek üslü bölgelerde **daha hızlı büyüdüğünü** gösterir.

Buna karşılık gelen standart ifade:

"Birimden büyük genlikler, büyük üslere karşı daha güçlü şekilde şişer ($p(x)$ arttıkça aniden büyük sayılara fırlaması)."

3. Sonuç: Değişken üslü uzayın temel davranışı

Bu iki durum birleştğinde, değişken üslü Lebesgue uzayı için matematiksel gözlem şudur:

Eğer $p(x)$ büyükse,
 $|f(x)|^{p(x)}$ küçük değerleri daha hızlı bastırır, büyük değerleri daha hızlı büyütür.

Dolayısıyla integral

$$\rho(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx$$

içinde yüksek üslü bölgeler, fonksiyonun hem küçük hem büyük genliklerine karşı daha hassastır.

- $p(x)$ arttıkça

$$|f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x)|^{p(x)} \downarrow 0$$

(daha güçlü küçülme)

- $p(x)$ arttıkça

$$|f(x)| > 1 \Rightarrow |f(x)|^{p(x)} \uparrow \infty$$

(daha hızlı büyüme)

Bu, değişken üslü uzayların normunun “lokal olarak daha sert” veya “daha gevşek” davranmasının matematiksel temelidir.

Örnek: Periyodik üsler

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x), \quad f(x) = \sin(\pi x)$$

ve $x \in (0,1)$ olsun.

1. Üs fonksiyonunun temel özellikleri

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$$

için:

- $\cos(2\pi x) \in [-1,1]$
- Dolayısıyla

$$p_{\min} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5, p_{\max} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

olur. Yani:

$$1.5 \leq p(x) \leq 2.5, \forall x \in (0,1)$$

dir.

Ayrıca,

$$\cos(2\pi(x + 1)) = \cos(2\pi x)$$

dir. Dolayısıyla

$$p(x + 1) = p(x)$$

olduğundan, $p(x)$ fonksiyonu **periyodu 1 olan bir periyodik üslüdür**.

Bu, $p(x)$ in **periyodik, sürekli ve Log-Hölder sürekliliğini** sağladığını gösterir (çünkü düzgün sınırlı türevlidir).

✓ “Düzgün sınırlı türevlidir” ne demek?

Bir fonksiyonun **türevi tüm tanım aralığında var** ve ayrıca **bir üst sınırla sınırlı** ise, o fonksiyona:

☞ **düzgün sınırlı türevli** (İngilizce: *uniformly bounded derivative*) denir.

Bu şu anlama gelir:

$p'(x)$ her x de tanımlı ve $|p'(x)| \leq M$ olacak bir $M > 0$ vardır.

Yani:

- türev var,
- türev “aşırı büyümüyor”,
- türev her yerde kontrollü.

✓ Bu ne işe yarar?

Bu özellik şunları sağlar:

- Fonksiyon **Lipschitz** olur
(Çünkü türevin sınırlı olması $\rightarrow$ Lipschitz süreklilik)
- Log-Hölder koşulu ise **küresel davranış** gerektirir (özellikle sonsuzda). Eğer fonksiyon düzgün sınırlı türevli ve ayrıca sonsuzda uygun logaritmik kontrol koşulunu sağlıyorsa, bu durumda global **log-Hölder sürekli** olur.
- Değişken üslü Lebesgue uzaylarında teorik birçok sonuç (maksimal operatörün sınırlılığı, gömülme teoremleri vb.) bu sınırlı türevlilikten çıkar.

✓ Bizim örneğimizde bu durum neden önemliydi?

$p(x)$ fonksiyonu:

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$$

türevi:

$$p'(x) = -\pi \sin(2\pi x)$$

ve bu açıkça sınırlıdır:

$$|p'(x)| \leq \pi.$$

Bu şu anlama gelir:

- $p(x)$ çok hızlı değişmez
- $p(x)$ sürekli **kontrollü** değişir
- Değişken üslu uzayının iyi çalışmasını sağlayan koşullar sağlanır.

✓ Kısacası:

“Düzgün sınırlı türevlidir” $\rightarrow$ “türevi her yerde var ve belli bir sayıdan büyük olamaz.”

2. Fonksiyonun davranışı

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

Bu fonksiyon için:

- $f(0) = 0, f(1) = 0$
- maksimum: $f(\frac{1}{2}) = 1$
- Her yerde $|f(x)| \leq 1$.

Dolayısıyla bu örnek $|f| < 1$ rejimi (fonksiyonun mutlak değerinin 1 den küçük olduğu çalışma bölgesi) içindedir.

Bu şu matematiksel sonucu doğurur:

Eğer $|f(x)| < 1$ ise,

$$p_1 < p_2 \Rightarrow |f(x)|^{p_2} < |f(x)|^{p_1}.$$

Yani büyük üslu bölgelerde integrand **daha hızlı küçülür**.

3. Modülerin ifadesi

Değişken üslu Lebesgue uzayındaki modüler:

$$\rho(f) = \int_0^1 |\sin(\pi x)|^{2+\frac{1}{2}\cos(2\pi x)} dx.$$

Bu integralin kapalı bir formu yoktur, ancak **davranışı matematiksel olarak açık şekilde anlaşılabilir**.

4. Matematiksel davranış analizi

A) $f(x)$ küçükken $p(x)$ büyük ise

$$|\sin(\pi x)|^{2.5} < |\sin(\pi x)|^{1.5}.$$

Özellikle uç noktalar yakınında:

$$\sin(\pi x) \approx \pi x \text{ (0 a yakın).}$$

Küçük bir sayının yüksek üs ile kuvveti **çok hızlı küçülür**:

$$(\pi x)^{2.5} \ll (\pi x)^{1.5}.$$

Dolayısıyla:

$p(x)$ büyük olduğu bölgelerde integrand daha da küçülür.

B) $f(x)$ maksimumdayken $p(x)$ orta değerdedir.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Bu noktada:

$$|\sin(\pi \cdot \frac{1}{2})| = 1.$$

Fakat:

$$1^p = 1, \forall p.$$

Dolayısıyla maksimum noktada integrandın değeri üs değişiminden etkilenmese bile, çevresindeki lokal davranış integralin toplam katkısını belirler.

Sonuç olarak, büyük üslü bölgelerde “tepe değerleri” değişmez Fakat tepeye yakın bölgelerde fonksiyon **daha hızlı düşer**.

5. Sonuç: Matematiksel olarak üssün etkisi

Bu örnek şu matematiksel olguyu gösterir:

$1.5 \leq p(x) \leq 2.5$ aralığı boyunca, $|f(x)| < 1$ olduğu için integrand yüksek üslü bölgelerde daha fazla bastırılır.

Yani:

- $p(x) = 2.5$ olan yerde

$$|\sin(\pi x)|^{2.5}$$

çok küçüktür.

- $p(x) = 1.5$ olan yerde

$$|\sin(\pi x)|^{1.5}$$

daha büyüktür.

Bu nedenle integralin büyük katkısı:

$p(x)$ küçük ≈ 1.5 olan bölgelerden gelir.

$p(x)$ büyük ≈ 2.5 olan bölgelerde ise:

$f(x)$ integrale daha zayıf katkı yapar.

6. Matematiksel Özet

$$\rho(f) = \int_0^1 |\sin(\pi x)|^{p(x)} dx \text{ ile } p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$$

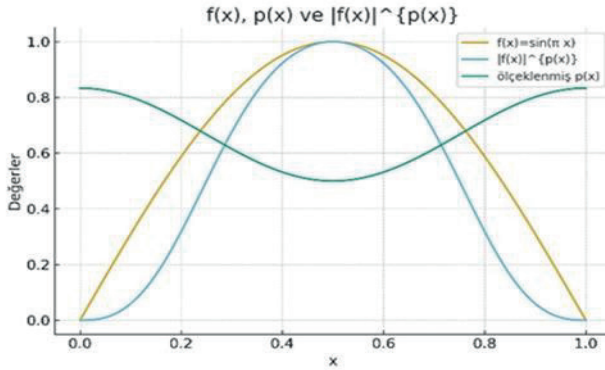
için:

1. $p(x)$ periyodiktir ve $1.5 - 2.5$ aralığındadır.
2. $f(x)$ uç noktalarda küçüktür $\rightarrow$ yüksek üslü bölgelerde daha hızlı sıfırlanır.
3. $f(x) = 1$ noktasında üsten etkilenmez $\rightarrow$ integral katkısı sabittir.
4. Integral çoğunlukla **$p(x)$ in küçük** olduğu bölgelerden katkı alır.

Şimdi de bu integrandın, yani

$$g(x) = |\sin(\pi x)|^{p(x)}$$

in grafiğini de çizerek



olur.

Grafikte şunları açıkça görüyoruz:

✓ **Turuncu eğri:**

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

- klasik sinüs tepesi
- ortada 1 e ulaşıyor
- uçlarda 0 dır.

✓ **Mavi eğri:**

$$g(x) = |\sin(\pi x)|^{p(x)}$$

Bu eğri **$f(x)$ in $p(x)$ ile kuvvetlendirilmiş hâlidir.**

Dikkat edersek:

- Uçlara yakın bölgelerde $f(x)$ küçük $\rightarrow p(x)$ büyük olduğunda daha hızlı küçülüyor $\rightarrow$ mavi eğri turuncudan daha **daha düşüktür.**
- Tepede $f(x) = 1$ olduğu için

$$1^{p(x)} = 1$$

$\rightarrow$ Mavi eğri tepe noktasında turuncu ile çıkışıyor.

Bu, değişken üslü gücün matematiksel etkisini tam olarak gösteriyor.

✓ **Yeşil eğri (ölçeklenmiş $p(x)$)**

Bu sadece görsel referans için:

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$$

fonksiyonunun $1/3$ ile ölçeklenmiş hâli.

$\rightarrow$ Gerçek $p(x)$ değerlerini göstermeyi amaçlıyor.

✂ **Grafiğin gösterdiği temel gerçek**

$p(x)$ büyük olduğunda, $|f| < 1$ olan bölgelerde $|f(x)|^{p(x)}$ çok daha hızlı küçülür.

Bu yüzden mavi eğri turuncudan daha aşağıdadır.

Diğer taraftan tekrar değişken üslü Lebesgue uzaylarının tanımına dönersek, eğer $p(x) = p_0$ (sabit) ise

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$$

olur.

Uygun koşullar altında (örneğin $1 \leq p_-(\mathbb{R}^n) \leq p_+(\mathbb{R}^n) < \infty$), $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı tamdır ve bir Banach uzayı oluşturur.

Şimdi de değişken üslü Lebesgue uzaylarında genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğini hatırlatalım.

$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, tüm $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

formunda tanımlanır, burada $r_p = 1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}$ dir (bkn: [[4], Teorem 2.1]).

Eğer $p(x) = 2 + \sin x$ ise bu durumda $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında fonksiyonların "yerel integralleştirilebilirlik derecesi" konuma göre değişir:

- $p(x)$ büyükse yüksek üstel $\rightarrow$ daha küçük büyüklükte fonksiyonlara izin verir.
- $p(x)$ küçükse düşük üstel $\rightarrow$ daha geniş fonksiyon sınıfına izin verir.

Bu tür uzaylar özellikle:

- **Nonlinear PDE** ($p(x)$ –Laplasyeni, elektoreolojik akışkanlar)
- **Harmanlanmış (adaptive) görüntü işleme**
- **Fonksiyonel analizde değişen düzgünlük**
- **Elektromanyetik alan modelleri**

gibi alanlarda ortaya çıkar. Çünkü fiziksel modellerdeki malzeme özellikleri (örneğin viskozite, elastisite) uzayda konuma bağlı olarak değişebilir.

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$Mf = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

ile tanımlanır, burada $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < r\}$ dir.

Aşağıda $L^{p(x)}(\Omega)$ **değişken üslü Lebesgue uzayları** için kavramsal olarak faydalı ve klasik örnekler listelenmiştir. Her biri, değişken üslü yapının neden kullanıldığını anlamaya yardım eder.

1. Parçalı sabit üsler örneği

En temel örnek, üslün bölgeler arasında sabit ama tüm bölgede farklı olmasıdır.

Tanım:

$$p(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0,1), \\ 4, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Bu durumda:

- $(0,1)$ aralığında klasik L^2 normuna benzer davranış,
- $(1,2)$ aralığında daha “dar” L^4 normuna benzer davranış gözlenir.

Yorum:

Aynı fonksiyon bazı bölgelerde daha düzenli, bazı bölgelerde daha serbest davranabilir.

2. Sürekli değişen üsler örneği**Hafif salınımlı değişim:**

$$p(x) = 2 + \sin x, x \in (0, 2\pi)$$

Bu örnekte

$p(x) \in [1,3]$ aralığında dalgalanır. Böylece integrabilite koşulu sürekli değişir.

Yorum:

Bu tür üslüler PDE analizinde çok kullanılır (ör. $p(x)$ -Laplasyen).

3. Logaritmik değişime sahip üsler

$$p(x) = 2 + \frac{1}{1 + |\log |x||}, x \in (0,1)$$

Bu üslü:

- $x \rightarrow 0$ yaklaşırken 2 ye doğru gider,
- merkezden uzaklaştıkça yavaşça artar.

Yorum:

Bu tür değişimler çok yavaş değişkenlik için tipik bir örnektir. “Log-Hölder sürekli” koşullarını incelemek için idealdir.

4. Dönemsel (periyodik) değişken üsler

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x), x \in \mathbb{R}$$

Bu durumda:

- $p(x) \in [3/2, 5/2]$ aralığında kalır.
- Üslü periyodik davranış gösterir.

Yorum:

Malzeme bilimi ve kompozit ortam modellerinde sıkça kullanılır.

5. Uzunlukla birlikte artan üsler

$$p(x) = 2 + |x|, x \in \mathbb{R}$$

Bu örnek:

- Orta bölgede $p(x) \approx 2$,
- Uzaklarda $p(x)$ büyüyerek fonksiyonun daha güçlü şekilde baskılanmasını sağlar.

Yorum:

Fonksiyonun sonsuzda çok hızlı büyümesini engelleyen iyi bir örnektir.

6. PDE kökenli örnek: $p(x)$ –Laplasyeni için

Tipik bir uygulama örneği:

$$p(x) = p_0 + \alpha |x|^2, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Burada:

- küçük $|x|$ için $p(x)$ yaklaşık sabittir,
- büyük $|x|$ için $p(x)$ daha hızlı artar.

Yorum:

Lineer olmayan eliptik problemler de çok kullanılır.

7. Genişlemeye izin veren üsler (akışkan dinamiği için)

$$p(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{1+|x|^2}$$

Bu üslü:

- merkezde daha büyük,
- sonsuzda $3/2$ ye düşer.

Yorum:

Bu tür üslülere Newtonyen olmayan akış modellerinde karşılaşılr.

✚ **Son olarak, örnek fonksiyonlarla norm hesaplamaları yapıp bu bölümü tamamlayalım.**

Yani, $f(x) = x^\alpha$ veya $f(x) = \chi_E$ gibi fonksiyonların $\|f\|_{L^{p(x)}}$ ve integral koşullarının nasıl değiştiğini gösterelim. Hem **hesap mantığını**, hem de **farklı $p(x)$ seçimleriyle ortaya çıkan ilginç durumları** görelim.

● 1. Temel örnek: Karakteristik fonksiyonun normu

$$f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$$

alalım ve üslü olarak:

$$p(x) = 2 + \sin x, x \in (0, \pi)$$

olsun.

Değişken üslü Lebesgue normunda önce modüler hesaplanır:

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_0^1 |1|^{p(x)} dx = \int_0^1 1^{2+\sin x} dx = 1$$

olur. Bu durumda:

- Eğer $\rho_{p(x)}(f) \leq 1$ ise $\|f\|_{p(x)} \leq 1$ dir.

Bu örnekte:

$$\|f\|_{p(x)} = 1$$

dir.

Yorum:

Sabit üslü durumundan farkı yoktur çünkü f mutlak değerce 1 ve üslü integral içinde dallanmıyor.

2. Güç fonksiyonu örneği

$$f(x) = x^\alpha, x \in (0,1)$$

alalım ve üslü olarak

$$p(x) = 2 + x$$

olsun.

Modüler:

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_0^1 x^{\alpha(2+x)} dx$$

olup, bu integral

$$\rho = \int_0^1 x^{2\alpha} x^{\alpha x} dx = \int_0^1 x^{2\alpha} e^{(\alpha x) \ln x} dx$$

şeklini alır.

Bu integraller genellikle kapalı formda **yoktur**, ama davranış çok nettir:

- Eğer $\alpha > 0$: integral küçük çıkar $\rightarrow f$ daha çok entegre edilebilir.
- Eğer $\alpha < 0$: integral büyür $\rightarrow$ özellikle 0 a yakın üslü artışı etkili olur.

Bu örnek, $p(x)$ in **küçük x lerde düşük**, büyük x lerde yüksek olması nedeniyle, fonksiyonun sonlara doğru daha sıkı kontrol edildiğini gösterir.

3. Parçalı üsler ile ilgili örnek

Üslü olarak

$$p(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0,1), \\ 4, & x \in (1,2), \end{cases}$$

ve fonksiyon olarak

$$f(x) = x$$

olsun.

Modüler:

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^4 dx$$

olur.

Bu integralleri ayrı ayrı hesaplarsak:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \frac{1}{3}, \\ \int_1^2 x^4 dx &= \frac{2^5 - 1^5}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla,

$$\rho = \frac{1}{3} + \frac{31}{5} = \frac{1}{3} + 6.2 = 6.5333 \dots$$

olur.

$\|f\|$ normunu elde etmek için

$$\rho\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = 1$$

seçilir.

Yaklaşık sonuç ($\approx$):

$$\|f\|_{p(x)} \approx 6.5333^{1/2} \approx 2.556$$

olur.

Yorum:

Üssün 4 olduğu ikinci aralık, normu dramatik şekilde büyütür. Değişken üslü uzaylar tam da bu duyarlılık için kullanılır.

● 4. Sonsuzda büyüyen üsler ile ilgili örnek

Üslü olarak

$$p(x) = 2 + |x|, x \in \mathbb{R},$$

ve fonksiyon olarak

$$f(x) = e^{-|x|}$$

seçelim.

Modüler:

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(2+|x|)|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|-|x|^2} dx$$

olur. Bu integral son derece hızlı yakınsar.

Yorum:

Bu, değişken üslülerin “sonsuzda giderken daha sert normlar” oluşturmak için ideal olduğunu gösterir.

● 5. Dönemsel(periyodik) üsler + sinüs fonksiyonu

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x), f(x) = \sin(\pi x), x \in (0,1)$$

alalım.

Modüler:

$$\rho(f) = \int_0^1 |\sin(\pi x)|^{2+\frac{1}{2}\cos(2\pi x)} dx.$$

- maksimum güç: 2.5
- minimum güç: 1.5

Dolayısıyla:

- **$p(x) = 2.5$ olduğu yerlerde**
 $|f(x)|^{p(x)} \rightarrow$ tepe bölgesi daha çok bastırılır.
- **$p(x) = 1.5$ olduğu yerlerde**
 $|f(x)|^{p(x)} \rightarrow$ tepe bölgesi daha az bastırılır.

Bu davranış modülleri, normu ve integrali belirgin biçimde değiştirir.

$\sin(\pi x)$ sınırda küçüldüğü için güç yüksek olduğu bölgelerde daha da baskılanır.

Bu integral kapalı formda olmasa bile:

- üs küçükken fonksiyon daha rahat,
- üs büyükken fonksiyonun tepe noktaları daha çok cezalandırılır (yani, tepe bölgesine üs fonksiyonun daha fazla bastırma/küçültme uyguladığı anlamına gelir.).

2 Ana Sonuç

Bu bölümde çalışmanın temel sonucu sunulmaktadır. Uygun çekirdek varsayımları ve değişken üslü koşulları altında, kaba kesirli maksimal operatörlerin komütatörlerinin değişken üslü Lebesgue uzaylarında Lipschitz tipinde sınırlı olduğu gösterilmektedir. Bu sonuç, klasik uzaylarındaki Lipschitz tipli komütatör tahminlerinin, değişken üslü ve değişken çekirdekli ortama doğal bir genişlemesini vermektedir.

Teoremin ispatı, noktasal tahminler, Hölder tipi eşitsizlikler ve değişken üslü maksimal operatörlerin bilinen sınırlılık sonuçlarının birleştirilmesine dayanmaktadır.

Teorem 1.

$n \geq 2$ olsun. $b \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $0 < \beta \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $\gamma := \alpha + m\beta$ ve $p(\cdot) \in B(\mathbb{R}^n)$ için

$$0 < \frac{\gamma}{n} \leq \frac{1}{p_+}$$

olduğunu varsayalım. $q(\cdot)$ noktaları her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\gamma}{n}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $\Omega(x, z)$ çekirdek fonksiyonu (1) ve (2) koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $C > 0$ olmak üzere her $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\| M_{\Omega, b, \alpha} f \|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| b \|_{\text{Lip}_\beta}^m \| f \|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

Hazırlık — tanımlar ve sabitler

- $\gamma := \alpha + m\beta$ yazalım. (bu pozitif ve $\gamma/n \leq 1/p_+$ varsayımından kaynaklıdır).
- Kesirli maksimal operatörü (klasik)

$$M_\gamma g(x) := \sup_{r>0} r^{\gamma-n} \int_{B(x,r)} |g(y)| dy$$

ile tanımlanır.

- L^s -ortalama tipi kesirli maksimal operatörü (kullanacağımız şekliyle):

$$M_{\gamma, s'} g(x) := \sup_{r>0} r^{\gamma-n+\frac{n}{s}} \left(\int_{B(x,r)} |g(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'},$$

olsun, burada $s > 1$ ve $s' = \frac{s}{s-1}$ (yani $1/s + 1/s' = 1$) dir. (Bu tanım, klasik kesirli maksimal operatörün $\Omega \in L^s(S^{n-1})$ çekirdeği ile genelleştirilmiş biçimidir ve [1,2] de kullanılan tanımlarla eşdeğerdir.).

- Sabit olarak $\| \Omega \|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \theta)|^s d\sigma(\theta) \right)^{1/s} < \infty$

olsun.

Teorem 1 in ispatını aşağıdaki gibi adım adım yapacağız.

Adım 1 — Noktasal dominasyon (Lipschitz kullanımı)

Tanım gereği (standart form)

$$M_{\Omega,b,\alpha} f(x) := \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |\Omega(x, x-y)| |b(x) - b(y)|^m |f(y)| dy$$

dir.

$b \in \text{Lip}_\beta$ olduğu için

$$|b(x) - b(y)|^m \leq \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m |x - y|^{m\beta}$$

yazılır.

Bunu $M_{\Omega,b,\alpha}$ tanımına koyarsak ve $\gamma = \alpha + m\beta$ alırsak

$$M_{\Omega,b,\alpha} f(x) \leq \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \sup_{r>0} r^{\gamma-n} \int_{B(x,r)} |\Omega(x, x-y)| |x - y|^{m\beta} |f(y)| dy$$

olur.

Sonra, içteki çarpanları birleştirip, $\gamma = \alpha + m\beta$ alırsak

$$M_{\Omega,b,\alpha} f(x) \leq \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \sup_{r>0} r^{\gamma-n} \int_{B(x,r)} |\Omega(x, x-y)| |f(y)| dy \quad (4)$$

elde edilir.

Adım 2 — Hölder ile Ω -ortalamasını ayırma ($L_{S^{n-1}}^s$ hipotezini kullanma)

Her x sabitleri ve $B := B(x, r)$ yuvarları için integral üzerinde Hölder eşitsizliği uygularsak (kullanılacak üsler s ve $s' = s/(s-1)$):

$$\int_B |\Omega(x, (x-y)')| |f(y)| dy \leq \left(\int_B |\Omega(x, (x-y)')|^s dy \right)^{1/s} \left(\int_B |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'} \quad (5)$$

olur.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ de kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned} \int_B |\Omega(x, (x-y)')|^s dy &= \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \theta)|^s d\sigma(\theta) = \\ &= \frac{r^n}{n} \int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \theta)|^s d\sigma(\theta) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \left(\int_B |\Omega(x, (x-y)')|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} &= C_n r^{\frac{n}{s}} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \theta)|^s d\sigma(\theta) \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C_n r^{n/s} \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi (5) de yazarsak

$$\int_B |\Omega(x, (x-y)')| |f(y)| dy \leq C_n \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} r^{n/s} \left(\int_B |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'} \quad (6)$$

olur.

(6) ya (4) içindeki ön çarpanı uygularsak

$$M_{\Omega,b,\alpha}f(x) \leq C_n \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \sup_{r>0} r^{\gamma-n} \cdot r^{n/s} \left(\int_{B(x,r)} |f|^{s'} \right)^{1/s'}$$

buluruz. Buradan üstteki üsleri birleştirip gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$M_{\Omega,b,\alpha}f(x) \leq C \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \sup_{r>0} r^{\gamma-n+\frac{n}{s}} \left(\int_{B(x,r)} |f|^{s'} \right)^{1/s'}. \quad (7)$$

$$=: M_{\gamma,s'}(f)(x)$$

elde edilir, burada $M_{\gamma,s'}$ bizim daha önce tanımladığımız $L^{s'}$ -ortalama kesirli maksimal operatördür. Sonuç olarak, (7) den

$$M_{\Omega,b,\alpha}f(x) \leq C \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m M_{\gamma,s'}(f)(x) \quad (8)$$

bulunur.

Adım 3 — $M_{\gamma,s'}$ için değişken-üslü sınırlılık (“Bilinen sınırlılık sonucu kullanılarak...”)

Şimdi tek yapmamız gereken, $M_{\gamma,s'}$ operatörünün

$$M_{\gamma,s'}: L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$$

arasında sınırlı olduğunu kullanmaktır (burada $q(\cdot)$ tanımını $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\gamma}{n}$ şeklindedir). Bu sınırlılık için gereken koşullar:

- $p(\cdot) \in B(\mathbb{R}^n)$ ve log-Hölder sürekliliği (bizim varsayımınız mevcut),
- $0 < \gamma < n$ (bizim $\gamma = \alpha + m\beta$ durumu),
- ve sabit $s > 1$ ile tanımlı s' kullanımı; literatürde $M_{\gamma,s'}$ tipindeki ortalama operatörlerin $L^{p(\cdot)} \rightarrow L^{q(\cdot)}$ sınırlılığı, M_γ için bilinen teoremlerle aynı tipte sonuç verir — gerekli şartları ($p(\cdot)$ için (1) ve (2) koşulları vb.) sağlayınca sonuç geçerlidir.

Bu sınırlılık, [1-3] de verilen kesirli maksimal operatör sonuçlarının doğrudan bir genellemesidir. Yani, öyle bir C' sabiti vardır ki

$$\|M_{\gamma,s'}(f)\|_{L^{q(\cdot)}} \leq C' \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \quad (9)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Adım 4 — Birleştirme ve sonuç

Son olarak, (8) ve (9) u birleştirirsek,

$$\begin{aligned} \|M_{\Omega,b,\alpha}f\|_{L^{q(\cdot)}} &\leq C \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \|M_{\gamma,s'}(f)\|_{L^{q(\cdot)}} \\ &\leq C \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s} \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m C' \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \end{aligned}$$

$$= C'' \|b\|_{\text{Lip}_\beta}^m \|f\|_{L^{p(\cdot)}},$$

elde edilir, burada $C'' = CC' \|\Omega\|_{L_x^\infty L_{S^{n-1}}^s}$ dir. Bu da tam olarak istenen eşitsizliktir.

3 Sonuç ve Değerlendirme

Elde edilen sonuçlar, değişken çekirdeklerin, kesirli yapının ve standart olmayan büyüme koşullarının birlikte ele alındığı daha genel bir çerçevede komütatörlerin davranışını açıklamaktadır. Bu yaklaşım, hem teorik harmonik analizde hem de doğrusal olmayan problemlerin analizinde kullanılabilecek yeni genellemelere kapı aralamaktadır.

Çalışmanın ilerleyen araştırmalarda, ağırlıklı değişken üslü uzaylar veya daha genel integral operatörleri için benzer sonuçlara genişletilmesi mümkündür.

4 Kaynakça

- [1] C. Capone, D. Cruz-Urbe and A. Fiorenza. The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces. *Rev. Mat. Iberoam.* 23(3), 743-770 (2007).
- [2] D. Cruz-Urbe and A. Fiorenza. Variable Lebesgue spaces. *Foundations and Harmonic Analysis. Appl. Numer. Harmon. Anal.* Springer, 2013.
- [3] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička. *Lebesgue and Sobolev Space with variable exponents*, Springer Lecture Notes, Vol. 2017, Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [4] O. Kováčik and J. Rákosník. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.* 41, 592-618 (1991).