

Problem Çözme Sürecinde Matematiksel Muhakeme ile Metabilîşsel Süreçler Arasındaki İlişkinin İncelenmesi

Ferit Gürbüz¹

Özet

Matematiksel muhakeme, matematik eğitiminin temel unsurlarından biridir. Bu çalışmada, öğrencilerin problem çözme sürecinde kullandıkları matematiksel muhakeme ile metabilîşsel süreçler arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırma, nitel yaklaşım benimsenerek yorumlayıcı paradigma çerçevesinde yürütülmüş ve yinelenmeli görselleştirme düşünme döngüsü temel alınmıştır.

Veriler, öğrencilerin problem çözerken düşünme süreçlerini açık biçimde yansıtmasını amaçlayan yapılandırılmış bir anket aracılığıyla toplanmıştır. Bulgular, öğrencilerin problemlere farklı çözüm yollarıyla yaklaştıklarını ve bu çeşitliliğin kavramsal anlamayı destekleyen önemli bir pedagojik unsur olduğunu göstermektedir. Ayrıca, matematiksel tanımların tutarlı ve doğru biçimde uygulanmasının, muhakemenin niteliğini ve açıklamaların bütünlüğünü belirgin biçimde etkilediği görülmüştür. Doğru çözüme ulaşan öğrencilerin, çözüm süreçlerini daha açık ve sistematik biçimde ifade ettikleri; bunun da gelişmiş problem çözme stratejileri ve artan metabilîşsel farkındalığa işaret ettiği sonucuna varılmıştır.

1 Giriş

Matematiksel muhakeme, matematik eğitiminin temel amaçlarından biri olup mantıksal argümanlar oluşturma, sonuçları gerekçelendirme ve problemleri sistematik biçimde çözme becerilerini kapsar. Son yıllarda yapılan araştırmalar, matematiksel muhakemenin geliştirilmesinde metabilîşin (üstbilîş, metakognisyon) — bireyin kendi düşünme süreçleri üzerine düşünmesi — kritik bir rol oynadığını ortaya koymuştur. Bu alanyazın

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X

incelemesi, metabilişsel süreçler ile matematiksel muhakeme arasındaki ilişkiyi kuramsal yaklaşımlar ve ampirik bulgular çerçevesinde ele almaktadır.

Bu tür araştırmalar eğitimciler açısından büyük önem taşımaktadır. Schoenfeld (16, s. 19), “öğrencilerin düşünme süreçlerine dair sundukları ipuçlarının, öğretmenlerin bilişsel talep düzeyini ayarlamalarına olanak sağladığını ve öğrencileri üretken bir bilişsel mücadele içinde tuttuklarını” belirtmektedir. Öğrencilerin muhakeme ve anlamlandırma süreçlerini inceleyen araştırmalar, öğretimin anlam oluşturmaya ve derin kavramsal öğrenmeye yönelik olarak düzenlenmesine katkı sunmaktadır.

Gura’a (4, s. 53) göre, matematikte olgusal bilgi ve içerik öğrenimi önemli olmakla birlikte yeterli değildir; öğrencilerin bu bilgileri problem çözme süreçlerinde düşünme becerilerini geliştirmek amacıyla kullanabilmeleri gerekmektedir. Bu durum, stratejik düşünmenin ve öz-düzenlemenin geliştirilmesinin önemine işaret etmektedir. Metabilişsel beceriler, öğrencilerin probleme nasıl yaklaşacaklarını planlamalarına, ilerlemelerini izlemelerine ve çözümlerinin makullüğünü değerlendirmelerine olanak tanır. Bu öz-düzenleyici kapasite, öğrencilerin hata yaptıklarında ya da kavramsal güçlüklerle karşılaştıklarında stratejilerini yeniden düzenlemelerini mümkün kılar.

Garofalo ve Lester (3, s. 173), matematik eğitimcilerinin yalnızca algoritma ve sezgisel stratejilerin öğretime değil, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel performanslarına yönelik metabilişsel bir duruş geliştirmelerine de rehberlik etmeleri gerektiğini vurgulamaktadır. Matematikte başarı yalnızca formül uygulama ya da prosedür ezberleme ile sınırlı değildir; bu bilgi ve yöntemlerin ne zaman, neden ve nasıl kullanılacağına anlaşılmaması gerektirir. Bu görüşü destekleyen sonraki çalışmalar da metabilişin artan önemine dikkat çekmektedir.

Hargrove ve Nietfeld (5, s. 309–310), metabilişsel becerilerin etkili öğrenme ve öz-düzenleme açısından kritik olduğunu; bu becerilerin gelişmesinin karmaşık problem çözmede gerekli olan koşullu anlama ve esnekliği artırdığını ortaya koymuştur.

Mattingly ve arkadaşları (7, s. 1257) ise metabilişsel bilginin, beklenen sonuç olasılığı ile sebat etme (ısrar) arasındaki ilişki üzerinde olumlu bir düzenleyici etkisi olduğunu göstermiştir. Metabilişsel bilgi, bireyin nasıl öğrendiğine ve düşündüğüne dair farkındalığını ifade eder ve zorluklar karşısında devam etme kararını açıklamada önemli bir rol oynar. Metabilişsel farkındalığı yüksek olan bireyler, zor problemlerle karşılaştıklarında problemi yeniden yapılandırabilir, daha küçük parçalara ayırabilir ve alternatif çözüm

yollarını değerlendirebilir. Bu durum, hayal kırıklığını azaltarak öğrenme sürecinde sürekliliği destekler.

Metabiliş, yalnızca bilişsel süreçleri değil, aynı zamanda özgüveni yüksek ve bağımsız öğrenen bireylerin gelişimini de destekler. Sesli düşünme (think-aloud) protokolleri, öz-sorgulama ve yansıtıcı günlükler gibi metabilişi destekleyen öğretim stratejileri, öğrencilerin matematiksel başarılarını ve derse katılımlarını önemli ölçüde artırabilmektedir.

1.1 Metabilişin Anlaşılması

Flavell (1), metabilişi bireyin kendi düşünme süreçlerine ilişkin bilgisi olarak kavramsallaştırmıştır. Daha sonra Flavell (2), metabilişi “düşünme üzerine düşünme” şeklinde tanımlamıştır. Bu tür bir farkındalık, öğrenenin bilişsel kapasitesini tanımasını ve karşılaştığı problemlere nasıl yaklaşacağına ilişkin stratejiler geliştirmesini sağlar. Bireyler kullandıkları teknikleri, yöntemleri ve argümanları gözlemleyerek, karmaşık kavramları anlama biçimlerinde önemli değişiklikler yapabilirler.

Schoenfeld (14) de matematik bağlamında metabilişin, öğrencilerin problemleri stratejik biçimde ele almalarını, ilerlemelerini izlemelerini ve çözümlerinin etkililiğini değerlendirmelerini sağladığını ifade etmiştir.

Quigley ve arkadaşları (13, s. 9), metabilişte öğrenenin öğrenme sürecini bilinçli biçimde izlemesi ve yönlendirmesinin önemine dikkat çekmektedir. Verdikleri örnekte, bir öğrenenin seçtiği bir ezberleme stratejisinin işe yarayıp yaramadığını izlediği ve elde ettiği kanıta göre stratejisini bilinçli olarak değiştirdiği vurgulanmaktadır. Örneğin, “Eşkenar obtuse (geniş açılı) bir üçgen mümkün müdür?” sorusu karşısında, öğrenenin seçtiği metabilişsel stratejiler hem bellek geri çağırma süreçlerini hem de en uygun bilişsel yaklaşımın belirlenmesini desteklemektedir.

Problem çözme süreci genellikle problemin anlaşılmasıyla başlar ve ardından bellekte daha önce kullanılan yöntem ya da formüllerin hatırlanmasıyla devam eder. Eğer doğrudan bir çözüm elde edilemezse, yeni bir strateji geliştirilir ve uygulanır. Bu süreç, çoğunlukla yinelemeli bir yapıya sahiptir; zihin olası stratejileri değerlendirir, gerekirse reddeder ve daha uygun bir yaklaşım belirler. Elde edilen çözüm test edilir, doğruluğu değerlendirilir ve gerektiğinde yeni planlamalar yapılır.

1.2 Metabiliş ve Matematiksel Muhakeme

Araştırmalar, metabilişsel farkındalık ile matematiksel muhakeme başarısı arasında güçlü bir ilişki olduğunu göstermektedir. Lestari ve Jailani (6, s. 6),

metabilişsel stratejilere maruz kalan öğrencilerin matematiksel muhakeme düzeylerinin arttığını ve matematiksel düşüncelerini yazılı olarak daha iyi ifade edebildiklerini ortaya koymuştur. Metabiliş, problemin anlaşılmasından strateji seçimine, çözümün değerlendirilmesinden hatalar karşısında yeni planlamalar yapılmasına kadar problem çözmenin tüm aşamalarına katkı sunmaktadır.

Kramarski ve arkadaşları (8), metabilişsel stratejilerle eğitilen öğrencilerin, geleneksel öğretim alan öğrencilere kıyasla matematiksel muhakeme görevlerinde anlamlı düzeyde daha başarılı olduklarını bulmuştur. Metabilişsel öğrenenler, hesaplamalara geçmeden önce problemi netleştirir, ilgili bilgileri belirler ve uygun stratejileri seçer. Süreç boyunca her adımı sorgulayarak hataların büyümesini engeller ve gerektiğinde etkisiz bir yöntemi terk edip yeni bir yaklaşım benimseyebilirler. Bu yansıtıcı süreç, matematiksel ilkelerin yalnızca nasıl uygulanacağını değil, neden işe yaradığını da anlamayı sağlar ve ilişkisel öğrenmeyi destekler.

Schoenfeld (15) de başarılı problem çözümleri ayıran temel unsurun yalnızca matematiksel bilgi değil, aynı zamanda bireyin kendi bilişsel kaynaklarını yönetme, yansıtma ve uyarlama becerisi olduğunu vurgulamıştır.

1.3 Görselleştirme ve Matematiksel Düşünme

Bu kısım, görselleştirmenin sürekli ve yinelemeli bir döngü olarak nasıl gerçekleştiğini göstermektedir (bkn., 9). Öğrenenler kavramla etkileşime girdikçe anlam derinleşir ve her döngüde kavram daha üst düzeyde uygulanabilir hâle gelir. Model dört aşamadan oluşmaktadır.

Birinci aşama, öğrenenin görsel bir uyarı ile etkileşime girdiği “yapma” aşamasıdır. Bu aşamada çizim yapma ve kavram üzerine düşünme gibi etkinlikler yer alır. Ön bilgi düzeyi ne kadar güçlü ise bu yansıtma süreci o kadar verimli olur.

İkinci aşama olan “anlama” aşamasında, öğrenen içsel ve dışsal süreçler yoluyla kavramı anlamlandırır ve zihinsel olarak kavramı yapılandırır.

Üçüncü aşama, öğrenenin kavramı sembolik biçime dönüştürebildiği aşamadır. Bu aşamada yazılı ispatlar üretilebilmesi beklenir.

Dördüncü aşama ise uygulama aşamasıdır; burada öğrenen, edindiği bilgiyi yeni problemleri açıklamak ve çözmek için kullanır. Döngü, yeni bir kavramla yeniden başlayabilir ya da mevcut kavram derinleştirilebilir.

Bu model, öğrencilerin matematiksel bir problem üzerinde çalışırken metabilişsel süreçleri ile matematiksel muhakeme becerileri arasındaki

ilişkiyi ortaya koymaktadır. Öğrencilerin yeni bilgileri mevcut kavramlarla ilişkilendirebilme yetkinliği, derin kavramsal anlayışın oluşmasında belirleyici bir rol oynamaktadır. Model, öğretmenlerin öğrencilerin muhakeme süreçleri üzerindeki farkındalıklarını ve bu süreçleri ne ölçüde kontrol edebildiklerini değerlendirmelerine olanak tanımakta; aynı zamanda öğrencilerin zihinsel bağlantılarını ve akıl yürütme biçimlerini görünür kılmaktadır. Bu yönüyle model, öğrencilerin işlemsel akıcılıklarını ve kanıta dayalı, uyarlanabilir ve kavramsal açıdan zengin düşünme becerilerini incelemek için güçlü bir çerçeve sunmaktadır.

2. Amaç

Bu çalışmanın amacı, fenomenolojik araştırma deseni kullanılarak lisansüstü matematik öğrencilerinde metabiliş, akıl yürütme ve matematiksel anlama arasındaki ilişkilerin incelenmesidir. Çalışma, lisansüstü matematik öğrencilerinin matematiksel problem çözme süreçlerine ilişkin deneyimlerini nasıl algıladıklarını ve anlamlandırdıklarını ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu bağlamda, katılımcıların verdikleri yanıtlar ve geliştirdikleri çözümler üzerinden metabilişsel ve akıl yürütme süreçleri analiz edilmiştir.

Araştırmanın temel sorusu şu şekildedir:

“Lisansüstü matematik öğrencilerinin problem çözme stratejileri ve matematiksel düşünceleri, metabilişsel ve akıl yürütme becerileriyle nasıl ilişkilidir?”

Bu temel soruya ek olarak aşağıdaki alt soru ele alınmıştır:

Lisansüstü matematik öğrencilerinin yazılı açıklamalarının açıklığı ve yapısal düzeni, matematiksel kavramsal anlama düzeyleriyle nasıl ilişkilidir?

3. Yöntem

Bu çalışma, lisansüstü matematik öğrencilerinin metabilişsel problem çözme etkinliklerini inceleyen nitel ve yorumlayıcı (interpretivist) bir araştırmadır. Araştırmanın çalışma grubunu, farklı sosyo-ekonomik geçmişlere sahip lisansüstü matematik öğrencileri oluşturmaktadır. Katılımcılar, zorunlu temel eğitimi ve lisans eğitimlerini tamamlamış, öğretmenlik yeterliğine sahip bireylerdir.

Araştırmaya katılım gönüllülük esasına dayalıdır. Katılımcılar, çalışmanın yalnızca araştırma amaçlı olduğunu ve herhangi bir akademik değerlendirmeye dâhil edilmediğini bilerek sürece katılmışlardır. Bu durum, katılımcıların problem durumlarını rahat bir şekilde ele almalarını ve çözümlerini ayrıntılı biçimde ifade etmelerini mümkün kılmıştır.

Araştırmada veri toplama aracı olarak yalnızca bir anket kullanılmıştır. Ancak anket, katılımcıların matematiksel bilgilerini ve metabilşsel süreçlerini en üst düzeyde ortaya çıkaracak şekilde yapılandırılmıştır. Sorular, yalnızca doğru cevaba veya matematiksel sonuca ulaşmayı değil; problem çözme öncesi, sırası ve sonrasındaki düşünme süreçlerini ayrıntılı biçimde açığa çıkarmayı amaçlamıştır. Bu doğrultuda, katılımcılardan problemleri nasıl ele aldıklarını, hangi düşünsel adımları izlediklerini ve problem çözme sürecinde gerçekte ne yaptıklarını açıklamaları istenmiştir.

Toplanan veriler, yorumlayıcı paradigma çerçevesinde nitel olarak analiz edilmiştir. İlk aşamada veriler geniş temalar altında gruplandırılmış, ardından bu temalar daha sınırlı ve anlamlı kategorilere indirgenmiştir.

4. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde öğrencilerin geometri problemlerine verdikleri yanıtlar analiz edilmiş; ortaya çıkan düşünme biçimleri, kavramsal anlayış düzeyleri ve problem çözme stratejileri tematik başlıklar altında sunulmuştur. Bulgular, matematik eğitimi literatürü çerçevesinde tartışılarak yorumlanmıştır.

4.1. Açık Problemlerinde Öğrenci Yaklaşımları

Matematiksel problem çözme, yalnızca doğru sonuca ulaşmayı değil; akıl yürütme, stratejik düşünme ve düşüncelerin açık biçimde ifade edilmesini içeren çok aşamalı bir süreci kapsar. Bu durum, “Bir açının bütünleri ile tümlerinin toplamı 150° dir. Açının ölçüsü nasıl bulunur?” sorusuna verilen öğrenci yanıtlarında açık biçimde görülmektedir. İlk bakışta basit bir cebirsel işlem gerektiriyor gibi görünen bu problem, daha yakından incelendiğinde, başarılı bir çözüm için cebirsel yeterliğin yanı sıra geometrik ilişkilerin kavramsal olarak anlaşılmasını da gerektirdiğini ortaya koymaktadır.

Problem, her ne kadar cebirsel düşünmeyi harekete geçirse de, öğrencilerin çözüm süreçlerinde görsel düşünmenin önemli bir rol oynadığı gözlemlenmiştir. Açık ilişkilerine dair bilgi büyük ölçüde görsel nitelik taşımaktadır. Bu bağlamda, zihinsel imgeleme (mental imagery), bilişsel süreçlerin temel bir bileşeni olarak değerlendirilmektedir (bkn., 10, s.1). “Tümleler” kavramı, zihinde 90° yi tamamlayan açılar; “bütünler” kavramı ise 180° yi oluşturan doğrusal açılar çağrıştırmaktadır. Dolayısıyla bu kavramlar, öğrencilerin zihninde $90^\circ - x$ ya da $180^\circ - x$ biçiminde temsiller oluşturmakta ve çözüm sürecini yönlendirmektedir. Öğrenci yanıtlarının analizi, katılımcıların geometri ve cebir bilgilerini farklı düzeylerde bütünleştirdiklerini ve matematiksel düşüncelerini ifade etme biçimlerinin çeşitlilik gösterdiğini ortaya koymuştur. Problemin matematiksel ifadesi

$$(180^\circ - x) + (90^\circ - x) = 150^\circ$$

şeklinde kurulmakta ve bu denklem $x = 60^\circ$ sonucuna ulaşmaktadır.

Katılımcıların büyük bir kısmı doğru sonuca ulaşmış olmakla birlikte, yanıtların sunum biçimleri, çoğu öğrencinin çözümü zihinsel ve görsel stratejiler kullanarak gerçekleştirdiğini göstermektedir. Bazı öğrenciler, ayrıntılı bir işlem süreci sunmaksızın, yalnızca açının ölçüsünü belirtmiş ve cebirsel denklemler kurmaya gerek olmadığını ifade etmiştir.

Diğer bir öğrenci grubu ise açığı x olarak tanımlamış, tümlerini ve bütünlerini doğru biçimde ifade etmiş ve bu ifadelerden hareketle bir denklem kurarak çözüm yoluna gitmiştir. Bu yanıtlar, açı ilişkilerine dayalı matematiksel akıl yürütmenin yanı sıra düzenli ve açık bir cebirsel ifade kullanımını da içermektedir.

Kavramsal akıl yürütmenin belirgin olduğu bazı yanıtlar, öğrencilerin önce tümler ve bütünler açılarının anlamlarını sözel olarak açıkladıklarını, ardından denklemi kurduklarını göstermektedir. Bu tür açıklamalar, cebirsel ayrıntılar sınırlı olsa bile, problemin yapısının doğru biçimde kavrandığını ortaya koymaktadır. Ayrıca bazı öğrenciler, buldukları sonucu denkleme geri yerine koyarak doğrulama yoluna gitmiş ve bu durum metabilşel farkındalık göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

Buna karşın, az sayıda öğrencinin problemin anlamını yanlış yorumladığı görülmüştür. Bu öğrencilerden biri, açının ölçüsünü doğrudan 180° ile 150° arasındaki fark olarak hesaplamış ve tümler açı kavramını dikkate almamıştır. Bir başka öğrenci ise tümler ve bütünler açıları ayrı ayrı ele alarak her birini 150° ye eşitlemiş, bu durum tanımların ve problem yapısının doğru bütünleştirilemediğini göstermiştir. Ayrıca, bu yaklaşımda, tümler açı ifadesinin negatif bir sonuç doğurabileceği fark edilmemiştir. Bu tür yanıtlar, kavramsal anlayıştaki eksikliklerin cebirsel sürece nasıl yansıdığını açıkça ortaya koymaktadır.

4.1.1. Zihinsel ve Görsel Yaklaşımlar

Bazı öğrenciler problemi zihinden çözdüklerini ifade etmiştir. Bu durum, geometrik sezginin problem çözme sürecinde önemli bir rol oynadığını göstermektedir. Görsel ipuçlarına dayanan öğrenciler, ara adımları yazmadan dahi cebirsel denklemi hızlı bir biçimde kurabilmiştir. Ancak bu görsel ipuçları yalnızca anlık sezgiye değil, aynı zamanda belleğe de dayanmaktadır; çünkü bellek, zihinsel imgelerden güçlü biçimde etkilenen bir bilişsel işlevdir (bkn., 10, s.1).

Görsel belleğe dayalı bu yaklaşım, matematik eğitimi alan yazında görsel temsillerin sembolik akıl yürütme için birer destek (scaffold) işlevi gördüğünü ortaya koyan bulgularla örtüşmektedir (bkn., 12). Bununla birlikte, çözüm sürecinin yazılı olarak ifade edilmemesi bazı riskler de taşımaktadır. Özellikle muhakemenin açık biçimde iletilmesi, öğretmenlik becerileri açısından ve matematik okuma becerisi zayıf bireyler için kritik öneme sahiptir.

4.1.2. Açık Cebirsel Modelleme

Birçok öğrenci çözüm sürecinde sembolik akıl yürütmeye güçlü bir vurgu yapmıştır. Öğrenciler bilinmeyen açıyı açıkça x olarak tanımlamış, bu açının tümlerini ve bütünlerini cebirsel ifadelerle göstermiş ve buna bağlı olarak denklemi kurmuştur. Çözümler çoğunlukla adım adım sadeleştirme içermektedir:

$$\text{Açı} = x$$

$$\text{Bütünler açı} = 180^\circ - x$$

$$\text{Tümleler açı} = 90^\circ - x$$

$$\text{Denklem: } (180^\circ - x) + (90^\circ - x) = 150^\circ$$

$$\text{Sadeleştirme: } 270^\circ - 2x = 150^\circ$$

$$\text{Çözüm: } x = 60^\circ.$$

Bu yaklaşım, işlemsel akıcılık ile kavramsal anlayışın birlikte kullanıldığını göstermektedir. Ayrıca çözüm sürecinin açık ve izlenebilir biçimde sunulması, matematiksel düşüncenin başkalarına aktarılabilmesini sağlamaktadır. Bu durum, özellikle pedagojik açıdan önemli bir beceri olan matematiksel iletişime işaret etmektedir.

4.1.3. Tanımlar Üzerinden Kavramsal Akıl Yürütme

Bazı öğrenciler çözüm sürecine tümleler ve bütünleler açılarının tanımlarını sözel olarak ifade ederek başlamıştır. Örneğin: “Bütünleler açılar toplamı 180° , tümleler açılar toplamı 90° dir. Bu nedenle

$$(180^\circ - x) + (90^\circ - x) = 150^\circ$$

olur. Buradan açı 60° bulunur.”

Bu tür yanıtlar, öğrencilerin sembolik işlemlere geçmeden önce muhakemelerini matematiksel tanımlara dayandırabildiklerini göstermektedir. Bu yaklaşım, tanımlara açık biçimde başvurmanın kavramsal gelişimi desteklediğini ve ezbere dayalı öğrenmeyi azalttığını vurgulayan araştırma bulgularıyla uyumludur (bkn.,17).

4.1.4. Doğrulama ve Metabilişsel Farkındalık

Bulgular, bazı öğrencilerin çözüm sürecinde yalnızca sonuca odaklanmadığını, aynı zamanda sonucun doğruluğunu kontrol etmeye yönelik stratejiler kullandığını göstermektedir. Özellikle elde edilen değerin denkleme geri yerine konularak doğrulanması, öğrencilerin öz denetim (self-monitoring) becerilerine sahip olduklarını ortaya koymuştur. Örneğin, elde ettikleri sonucu denkleme geri yerine koyarak doğrulama yapmışlardır:

“Her iki tarafın 150° olup olmadığını kontrol etmek için $x=60^\circ$ değerini denklemde yerine koyarım.”

Bu durum, problem çözmenin yalnızca işlemsel bir süreç olmadığını; aynı zamanda çözümün geçerliliğini sorgulamayı içeren metabilişsel bir boyuta sahip olduğunu göstermektedir. Literatürde metabilişsel farkındalığın, matematiksel başarıyı ve öğrenmenin kalıcılığını artıran temel bir unsur olduğu vurgulanmaktadır. Dolayısıyla bu tür doğrulama davranışları, öğrencilerin daha gelişmiş problem çözme profiline sahip olduklarını düşündürmektedir.

4.1.5. Yanlış Yorumlamalar ve Kavram Yanılgıları

Bulgular, bazı öğrencilerin verilen koşulları bütüncül olarak ele almakta zorlandığını ortaya koymuştur. Özellikle 150° lik koşulun doğrudan 180° ile ilişkilendirilmesi, öğrencinin problemdeki ilişkileri yüzeysel biçimde yorumladığını göstermektedir. Bu tür yanıtlar, tümler ve bütünler açısı kavramlarının işlevsel olarak bütünleştirilemediğine işaret etmektedir. Örneğin bir öğrenci şu ifadeyi kullanmıştır:

$$“x=180^\circ-150^\circ=30^\circ”$$

Bu çözüm, problemin yanlış yorumlandığını göstermektedir. Öğrenci, 150° yi doğrudan 180° den çıkarmış; böylece bütünler açısı kavramını nihai koşulla karıştırmış ve tümler açısının rolünü göz ardı etmiştir.

Benzer biçimde, bazı öğrencilerin verilen koşulları tek bir denklem altında birleştirmek yerine ayrı ayrı ele aldığı gözlemlenmiştir. Bu bulgu, öğrencilerin cebirsel modelleme sürecinde ilişkisel düşünme yerine parçalı bir yaklaşım benimsediklerini göstermektedir. Tartışma bağlamında bu durum, öğrencilerin cebiri bir “hesaplama aracı” olarak görüp, matematiksel ilişkileri temsil eden bir dil olarak kullanmakta zorlandıklarını düşündürmektedir. Örneğin, bir başka öğrenci ise şu ifadeyi kullanmıştır:

$$“\text{Tümler} = 90^\circ - x, \quad \text{bütünler} = 180^\circ - x. \quad \text{O hâlde} \quad (180^\circ - x = 150^\circ, 90^\circ - x = 150^\circ).”$$

Bu yaklaşımda koşullar tek bir denklemde birleştirilmemiş, ilişkili durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu durum, öğrencinin verilen bilgileri bütüncül bir matematiksel yapı içinde birleştirmekte zorlandığını göstermektedir.

4.2. Eşkenar ve Geniş Açılı Üçgen Problemi

Matematik eğitiminde, özellikle geometrik kavramların öğretiminde kavramsal netlik büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda “eşkenar geniş açılı bir üçgen mümkün müdür?” sorusu, öğrencilerin tanımları, açı ilişkilerini ve mantıksal çıkarımı nasıl kullandıklarını ortaya koyan öğretici bir örnektir. Bu soru, öğrencilerin yalnızca bilgi düzeylerini değil, aynı zamanda akıl yürütme biçimlerini ve matematiksel dili kullanma becerilerini de görünür kılmaktadır.

Öğrencilere yöneltilen soru şu şekildedir:

“Eşkenar ve geniş açılı bir üçgen mümkün müdür? Neden? Nasıl düşündüğünü açıklayınız.”

Bu sorunun yanıtlanabilmesi için temel tanımların bilinmesi gerekmektedir. Eşkenar üçgen, üç kenarı ve üç açısı eşit olan üçgendir. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° olduğundan, eşkenar üçgende her bir açı 60° dir ve bu açı dar açıdır. Geniş açı ise 90° den büyük, 180° den küçüktür. Dolayısıyla bu iki özellik birbiriyle bağdaşmamaktadır. Öğrencilerin büyük çoğunluğu, eşkenar geniş açılı bir üçgenin mümkün olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Gerekçeleri belirli temalar altında toplanabilmektedir.

Bu problem, öğrencilerin geometrik tanımları kullanma, mantıksal çıkarım yapma ve matematiksel dili doğru biçimde kullanma becerilerini incelemek açısından önemli bulgular sunmuştur.

4.2.1. Açı Toplamı ve Sabitlik Temelli Gerekçelendirme

Birçok öğrenci, doğrudan üçgenlerin iç açıları toplamı ve eşkenar üçgenin özelliklerinden hareket etmiştir:

“Hayır. Eşkenar üçgende üç açı da 60° dir. Geniş açı 90° den büyük olduğu için bu mümkün değildir.”

Bu yaklaşım, öğrencilerin temel geometrik özellikleri işlevsel biçimde kullanabildiklerini göstermektedir. Tartışma açısından bakıldığında, bu tür gerekçelendirmeler görsel sezgi ile tanımsal bilginin bir arada kullanıldığını ve sağlam bir kavramsal temele dayandığını göstermektedir.

Bulgular, öğrencilerin büyük çoğunluğunun eşkenar üçgenin açı özelliklerini doğru biçimde kullandığını göstermektedir. Öğrenciler, eşkenar

üçgende tüm açılar 60° olduğu bilgisinden hareketle geniş açılı bir eşkenar üçgenin mümkün olmadığını ifade etmiştir.

4.2.2. Tanımlar Arası Mantıksal Çelişki Kurma

Bazı öğrenciler ise açıklamalarını doğrudan tanımlar arasındaki çelişki üzerine kurmuştur:

“Eşkenar üçgende tüm açılar eşit ve 60° dir. Geniş açılı üçgende ise en az bir açı 90° den büyüktür. Bu iki durum aynı anda gerçekleşemez.”

Eşkenar üçgen ve geniş açılı üçgen tanımlarının aynı anda sağlanamayacağını ifade eden bu açıklamalar, öğrencilerin matematiksel düşünmede mantıksal tutarlılığı gözetebildiklerini göstermektedir.

Bu bulgu, tanımların yalnızca ezberlenmediğini; aynı zamanda karşılaştırılarak akıl yürütme aracı olarak kullanılabildiğini ortaya koymaktadır. Literatürle uyumlu olarak, bu tür tanım temelli çıkarımlar yüksek düzeyde kavramsal anlayışın göstergesi olarak değerlendirilebilir.

4.2.3. Görselleştirme ve Geometrik Sezgi

Bazı öğrenciler çözüm sürecinde eşkenar bir üçgeni zihinsel olarak canlandırmış ve geniş açının bu yapı içinde mümkün olmadığını ifade etmiştir:

“Eşkenar üçgende tüm açılar zorunlu olarak 60° dir. Geniş açının varlığı bu tanıma doğrudan ihlal eder.”

Bu yaklaşım, sembolik işlemlerden ziyade şeklin yapısına odaklanmaktadır. Görsel temelli bu akıl yürütme, güçlü bir geometrik sezgiyi yansıtmaktadır. Ancak bu tür zihinsel kanıtların yazılı ve sistematik bir açıklamayla desteklenmesi pedagojik açıdan önemlidir.

Ancak bulgular, bu görsel temelli akıl yürütmenin çoğu zaman yazılı ve sistematik bir açıklamayla desteklenmediğini de ortaya koymuştur. Tartışma bağlamında bu durum, görsel sezginin güçlü bir bilişsel araç olmakla birlikte, matematiksel iletişim açısından açık ifadelerle desteklenmesi gerektiğini göstermektedir.

4.2.4. Matematiksel Dil Kullanımı

Öğrencilerin çoğu “eşit açılar”, “ 90° den büyük”, “ 180° lik toplam” gibi doğru matematiksel terimleri kullanmıştır. Bu durum, matematiksel dilin doğru kullanımının hem düşünmeyi hem de iletişimi desteklediğini göstermektedir. Az sayıda yanıtta görülen dilsel hatalar (örneğin “geniş

kenar”) ise daha çok ifade eksikliğine işaret etmekte, ciddi bir kavram yanlışlığı göstermemektedir.

Öğrenci yanıtlarının büyük bir kısmında doğru geometrik terminolojinin kullanıldığı görülmüştür. “Eşit açılar”, “ 90° den büyük”, “ 180° ” gibi ifadeler, öğrencilerin matematiksel dili genel olarak doğru kullandıklarını göstermektedir.

Bununla birlikte, az sayıda yanıtta kavramların yer değiştirdiği veya yanlış terimlerin kullanıldığı gözlemlenmiştir. Tartışma açısından bu durum, dilsel hataların her zaman kavramsal yanlışlığa karşılık gelmediğini; ancak matematiksel düşüncenin açık biçimde ifade edilmesini zorlaştırdığını göstermektedir.

4.2.5. Kavram Yanlışları

Bazı yanıtlar açı ve kenar kavramlarını birbirine karıştırmıştır:

“Eşkenar üçgenin kenarları 180° eder.”

Bu ifade, kavramların yanlış kullanılmasına rağmen öğrencinin sonuca doğru biçimde ulaşabildiğini göstermektedir. Bu durum, kısmi bir anlayışa işaret etmektedir.

4.3. Dörtgende Açı Problemi ve Problem Çözme Süreçleri

Problem çözme, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ortaya koyan temel bir öğrenme alanıdır. Öğrencilere yöneltilen şu soru bu açıdan zengin bir bağlam sunmuştur:

“Bir dörtgende iki açı eşittir. Üçüncü açı bu iki açının toplamına eşittir. Dördüncü açı ise diğer üç açının toplamının iki katından 60° eksiktir. Açılar nasıl bulursunuz?”

Bu soruda öğrencilerden yalnızca sonuca ulaşmaları değil, çözüm sürecini açıklamaları beklenmiştir. Ancak birçok öğrenci doğrudan hesaplama yapmış, çözüm yöntemini ayrıntılandırmamıştır.

Bu problem, öğrencilerin yalnızca çözüm üretme değil, çözüm sürecini planlama ve ifade etme becerilerini de değerlendirmeyi amaçlamıştır.

4.3.1. Cebirsel Modelleme Becerileri

Bulgular, bazı öğrencilerin sözel koşulları cebirsel ifadelere dönüştürme konusunda başarılı olduklarını göstermektedir. Değişken tanımlama, açıları cebirsel olarak ifade etme ve dörtgenin iç açılar toplamını kullanarak denklem kurma gibi adımlar, güçlü bir işlemsel yeterliliğe işaret etmektedir.

Bu tür yanıtlar, öğrencilerin cebiri ilişkileri temsil eden bir araç olarak kullanabildiklerini göstermektedir.

Başarılı öğrenciler şu adımları izlemiştir:

- Eşit açılar için bir değişken tanımlama
- Üçüncü ve dördüncü açıyı cebirsel olarak ifade etme

Dörtgenin iç açılar toplamını (360°) kullanarak denklem kurma

Denklemi çözerek tüm açıları bulma.

Bu süreç, sözel bilgilerin cebirsel modele dönüştürülebildiğini ve işlemsel yeterliliğin gelişmiş olduğunu göstermektedir.

4.3.2. Sistematik ve Adımlı Akıl Yürütme

Bazı öğrenciler çözümü sistematik biçimde planlamıştır:

“Değişkenleri tanımla, denklemi kur, çöz ve doğrula.”

Bu yaklaşımda bazı öğrencilerin çözüm sürecini açık ve sıralı adımlar hâlinde yapılandığı görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin problem çözme sürecinde planlama ve süreci düzenleme becerilerinin gelişmiş olduğunu göstermektedir. Bulgular, söz konusu yaklaşımın problemi anlama, çözüm için plan oluşturma, planı uygulama ve sonucu kontrol etme aşamalarını içeren Pólya'nın problem çözme modeliyle örtüştüğüne işaret etmektedir (bkn., 11).

4.3.3. Görsel Temsillerin Kullanımı

Bir öğrenci şu ifadeyi kullanmıştır:

“Önce dörtgeni çiziyorum, sonra denklemi kuruyorum.”

Bu durum, görselleştirmenin özellikle çok koşullu problemlerde bilişsel yükü azalttığını göstermektedir. Bu bulgu, diyagram kullanımının problem çözme destekleyen etkili bir strateji olduğunu ortaya koymaktadır.

4.3.4 Problem Çözme Süreçlerine Yansıtıcı Bakış

Bir öğrenci, problem çözme sürecine ilişkin düşüncelerini açıkça şu şekilde ifade etmiştir:

“1) Değişkenleri belirle ve tanımla 2) Denklem kur 3) Çöz 4) Doğrula.”

Bu ifade, öğrencinin problem çözme sürecini planlama ve çözümünü doğrulama aşamalarını bilinçli bir şekilde ele aldığını göstermektedir. Bu durum, matematiksel gelişim açısından kritik öneme sahip olan **metabilişin**

gelişmekte olduğuna, yani öğrencinin kendi düşünme süreçlerinin farkında olduğuna işaret etmektedir. Öğrencilerin bir problemi *nasıl* çözdükleri üzerine düşünmeye teşvik edilmeleri, yalnızca mevcut problemi daha etkili çözmelerini sağlamakla kalmaz; aynı zamanda edinilen problem çözme becerilerinin farklı ve yeni bağlamlara aktarılmasını da destekler. Bu tür açık yansıtma, problem çözme stratejilerinin bağlamlar arası transferini güçlendiren **metabilişsel izleme** becerisinin varlığını ortaya koymaktadır.

4.4 Geometrik Ayırıştırma Yoluyla Alan ve Çevreye İlişkin Kavramsal Anlayış

Öğrencilerin üzerinde çalıştığı son problem, **geometrik ayırıştırma** yoluyla alan ve çevre kavramlarına ilişkin kavramsal anlayışlarını incelemeyi amaçlamaktadır. Alan ve çevre, geometri öğreniminin temel kavramları arasında yer almakta olup, her ne kadar her ikisi de şekillerle ilişkili olsa da farklı matematiksel anlamlara sahiptir. Alan, bir şeklin kapladığı içsel yüzey miktarını ifade ederken; çevre, şeklin dış sınırını oluşturan toplam uzunluğu temsil etmektedir. Bu ayırım, özellikle bir şekil üzerinde çıkarma, ekleme ya da yeniden düzenleme gibi değişiklikler yapıldığında öğrenciler için sıklıkla kavramsal karışıklığa yol açabilmektedir.

Bu soru, öğrencilerin geometrik bir dönüşüm karşısındaki düşünme biçimlerini incelemektedir. Sol tarafta verilen bir dikdörtgen, sağ tarafta iki küçük dikdörtgen çıkarılarak yeniden oluşturulmuştur. Öğrencilerden aşağıda verilen ifadelerden birini seçmeleri istenmiştir:

- Alan ve çevre aynı kalır.
- Alan aynı kalır, ancak çevre değişir.
- Alan değişir, ancak çevre aynı kalır.
- Hem alan hem çevre değişir.
- Yorum yapmak zordur.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar şu şekilde sınıflandırılmıştır:

- **Doğru kavramsal anlayış:** Öğrencilerin büyük çoğunluğu “alan değişir, ancak çevre aynı kalır” ifadesini doğru şekilde seçmiştir.
- **Kısmi kavramsal yanılğı:** Birkaç öğrenci “hem alan hem çevre değişir” yanıtını vermiştir.
- **Kavramsal karışıklık:** Bir öğrenci “alan aynı kalır, ancak çevre değişir” ifadesini seçmiştir.

- **Yanlış genelleme:** Bir öğrenci “alan ve çevre aynı kalır” yanıtını vermiştir.

4.4.1 Baskın Doğru Kavrayış: Alan Değişir, Çevre Aynı Kalır

Öğrencilerin büyük bir kısmı doğru yanıtı vermiştir. Bu öğrenciler, bir şeklin iç kısmından parçalar çıkarılmasının kaplanan alanı azalttığını; ancak dış sınırdaki herhangi bir değişiklik yapılmadığı sürece çevrenin sabit kaldığını doğru biçimde fark edebilmişlerdir.

“Alan değişir, ancak çevre aynı kalır.”

Bu yanıt, öğrencilerin şu kavramsal anlayışlara sahip olduklarını göstermektedir:

- Alanın, şekli oluşturan parçaların alanlarının toplamına dayalı **eklenebilir** bir büyüklük olduğunun farkında olunması; dolayısıyla iç bileşenlerin çıkarılmasının toplam alanı azaltacağı bilgisi.
- Çevrenin yalnızca şeklin **dış sınırları** tarafından belirlendiği ve bu sınırlar değişmediği sürece çevrenin korunacağı yönünde bir anlayış. Bu durum, çevrenin korunumu fikrinin oluştuğunu göstermektedir.

Şeklin iç yapısı değişmesine rağmen dış hatlarının sabit kaldığını zihinsel olarak canlandırabilmek, öğrencilerin geometrik ayırtırmaya dayalı akıl yürütme becerilerinin geliştiğini ve **kavramsal olgunluğa** ulaştıklarını göstermektedir.

4.4.2 Alan ve Çevrede Değişim Yanılgısı

Bazı öğrenciler hem alanın hem de çevrenin değiştiğini ifade etmiştir. Bu durum, alanı ve çevreyi etkileyen değişiklikler arasındaki farkın yeterince netleşmediğine işaret etmektedir. Öğrenciler, şekil üzerinde yapılan her değişikliğin her iki ölçüyü de zorunlu olarak etkileyeceğini düşünüyor olabilirler.

Bu yanılgının olası nedenleri şunlardır:

- Ölçeklendirme ya da büyütme-küçültme deneyimlerine dayalı **aşırı genelleme**, bu tür durumlarda hem alanın hem çevrenin birlikte değişmesi.
- Şeklin görsel olarak yanlış yorumlanması; çıkarılan parçaların yeni sınırlar oluşturduğu varsayımı.
- İki boyutlu şekillerde alan ve çevre kavramlarına ilişkin **yetersiz kavramsal ayırım**.

4.4.3 Alan ve Çevrenin Birbirine Karıştırılması

Bir öğrenci şu ifadeyi kullanmıştır:

“Alan aynı kalır, ancak çevre değişir.”

Bu yanıt, kavramsal olarak ters bir ilişkiyi yansıtmaktadır. Şekilden parçalar çıkarıldığında kaplanan alanın azalması kaçınılmazdır. Çevrenin değiştiği düşüncesi ise, öğrencinin çevreyi tüm kenarların toplamı olarak algılamasından kaynaklanmış olabilir. Bazı durumlarda iç boşlukların yeni kenarlar oluşturması çevreyi etkileyebilir; ancak bu, şeklin dış sınırlarıyla ilişkilidir ve her geometrik durumda geçerli değildir.

Bu yanıt, öğrencinin alan ve çevre hesaplamalarına ilişkin **eksik bir zihinsel model** geliştirdiğini ve görsel akıl yürütme sürecini yeterince kullanmadığını göstermektedir. Bu durum, geometri öğretiminde açık tanımlara, doğru matematiksel dile ve görselleştirmeye dayalı etkinliklerin önemini ortaya koymaktadır.

4.4.4 Yanlış Genelleme: Hiçbir Şey Değişmez

“Alan ve çevre aynı kalır” şeklindeki yanıt, tamamen yanlış olup öğrencinin ya tahmine dayalı bir seçim yaptığını ya da soruyu yüzeysel bir şekilde değerlendirdiğini düşündürmektedir. Bu yanıt, bir şeklin kopyalanmasının, içinden parçalar çıkarılsa bile ölçüleri etkilemeyeceği gibi hatalı bir genellemenin varlığına işaret etmektedir.

Bu durum, öğrencinin görsel bilgiyi etkin biçimde kullanamadığını ve alan–çevre kavramlarını yeterince içselleştirmedeğini göstermektedir. Bu tür yanıtlar, kavramsal pekiştirme, somut materyallerle çalışma ve deneyim temelli öğrenme etkinliklerine duyulan gereksinimi açıkça ortaya koymaktadır.

5. Sonuç

5.1 Elde Edilen Öğretimsel Çıkarımlar

Her bir soruda ortaya çıkan yanıt çeşitliliği, öğrenciler doğru sayısal sonuca ulaşırlar dahi, bu sonuca ulaşırken kullandıkları akıl yürütmenin derinliği ve açıklığının önemli ölçüde farklılık gösterdiğini ortaya koymaktadır. Lisansüstü matematik öğrencileri açısından, cebirsel akıl yürütmeyi açık ve şeffaf biçimde modelleyebilme becerisi kritik bir öneme sahiptir. Bu bulgular, öğretmen eğitiminde yalnızca doğru sonuca ulaşmanın değil; aynı zamanda akıl yürütmenin gerekçelendirilmesinin, tanımların bilinçli kullanımının ve çözümlerin doğrulanmasının da özellikle vurgulanması gerektiğini göstermektedir.

Çalışmada ele alınan problemler, geometride tanımsal akıl yürütme, görselleştirme ve mantıksal çelişki kullanımının nasıl kesiştiğini açıkça ortaya koymaktadır. Lisansüstü matematik öğrencileri için, eşkenar geniş açılı bir üçgenin neden mümkün olmadığını gerekçelendirebilmek, bunun mümkün olmadığını bilmekten çok daha önemlidir. Bu bulgular, matematik eğitiminde **kavramsal açıklık** ve **dilsel kesinliğin** temel kazanımlar arasında yer alması gerektiği görüşünü desteklemektedir.

Dörtgen probleminde ise cebirsel modelleme, görselleştirme ve yansıtıcı düşünmenin etkileşimi gözlemlenmiştir. Yapılandırılmış yaklaşımlar kullanan ve çözüm sürecini açıkça doğrulayan öğrencilerin daha yüksek düzeyde akıl yürütme olgunluğu sergiledikleri görülmüştür. Lisansüstü matematik öğrencileri için bu tür bir yansıtıcı farkındalık, hem kendi problem çözme süreçlerini geliştirmeleri hem de öğrenci öğrenmesini yapılandırabilmeleri açısından vazgeçilmezdir.

Ortaya çıkan kavram yanılgıları, şekillerin içsel ve dışsal özellikleri arasındaki ayrımı yapmada yaşanan güçlükleri ortaya koymaktadır. Alan ve çevre kavramlarının karıştırılması, özellikle ilkökul düzeyinde yaygın bir hata olduğundan, lisansüstü matematik öğrencileri için bu ayrımların net ve doğru biçimde içselleştirilmesi büyük önem taşımaktadır.

5.2 Lisansüstü Matematik Öğrencilerinin Problem Çözme Stratejileri ve Matematiksel Düşünmelerinde Metabilîş ve Akıl Yürütmenin Rolü

Öğrencilerin problemlere verdikleri yanıtlar; görsel düşünme, kavramsal anlayış, görsel akıcılık ve matematiksel iletişim becerileri açısından farklı düzeyler ortaya koymaktadır. Çoğu öğrenci doğru yanıtı ulaşmış olsa da, izledikleri çözüm yolları matematiksel düşünmenin farklı biçimlerde ifade edilebileceğini göstermektedir. Öğrenciler problemleri çözerken farklı stratejiler seçmişlerdir. Birer eğitimci olarak, bu çeşitlilik; akıl yürütme, modelleme ve iletişim becerilerinin güçlendirilmesi için önemli bir fırsat sunmaktadır. Bu beceriler, etkili matematik öğretiminin temel yapı taşlarıdır.

Bu tür kazanımlar, tanımların bilinçli kullanımı, cebirsel modelleme, geometrik akıl yürütme ve görsel düşünmenin özellikle vurgulanması yoluyla desteklenebilir. Öğrencilere yalnızca “problemi çözmeleri” değil, “bu problem kaç farklı yolla çözülebilir?” sorusunun da yöneltilmesi, matematiksel düşünmeyi derinleştiren önemli bir pedagojik yaklaşımdır.

Geniş açılı eşkenar üçgen probleminde olduğu gibi özenle seçilmiş sorular, öğrencilerin üçgen özelliklerine ilişkin anlayışlarını ve matematiksel akıl yürütme becerilerini değerlendirmek için etkili bir araçtır. Öğrencilerin

tanımları tutarlı ve doğru biçimde uygulayabilmeleri, soyut düşünme düzeylerini ve tutarlı matematiksel açıklamalar kurma becerilerini doğrudan yansıtmaktadır. Aynı zamanda, açıklamalardaki ince farklılıklar, öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl yapılandırdıklarını ve ifade ettiklerini ortaya koymakta; bu da geometride ileri düzey öğrenme için kritik bir yeterlidir.

Tanımların içselleştirilmesi, onların yerinde ve doğru kullanımını mümkün kılarak daha açık ve kendinden emin yanıtların ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Aynı problem, birbirini dışlayan özellikler üzerine **mantıksal çelişki** yoluyla akıl yürütmeyi teşvik etmek için de etkili biçimde kullanılabilir. Tüm bu süreçlerde, dilin doğru kullanımı ve açıklık büyük önem taşımaktadır. Öğrencilerin düşüncelerini nasıl ifade ettikleri üzerine geri bildirim verilmesi, kavramsal anlayışın derinleşmesine katkı sağlamaktadır.

Dörtgen probleminde, matematikte modelleme, mantıksal akıl yürütme ve iletişim açısından zengin öğrenme fırsatları sunulmuştur. Öğrencilerin büyük bir kısmı doğru çözümlere ulaşmış ve süreçlerini açıkça ifade edebilmiştir; bu durum, problem çözme stratejilerinde gelişen bir yetkinliğe işaret etmektedir. Bununla birlikte, yanıtların açıklık ve yapı bakımından farklılık göstermesi; özellikle gösterim, notasyon ve doğrulama aşamalarında öğretimsel iyileştirme alanlarının bulunduğu ortaya koymaktadır.

Öğrenci yanıtları, problem çözme sürecinde şu önemli becerilerin desteklenebileceğini göstermektedir:

- Sözel ipuçlarının denklemlere dönüştürülmesi sürecinin modellenmesi,
- Gerekğinde görselleştirmeden yararlanılması,
- Cebirsel işlemlerin yapısının ve doğru notasyonun pekiştirilmesi,
- Problem çözme süreci üzerine yansıtıcı düşünmenin teşvik edilmesi yoluyla matematiksel akıl yürütmenin geliştirilmesi.

Alt bölümleri çıkarılmış bir dikkörtgenin analizine dayalı görev ise, öğrencilerin alan ve çevre arasındaki ilişkiyi nasıl yorumladıklarını açıkça ortaya koymuştur. Çoğu öğrenci alanın azaldığını, ancak çevrenin değişmediğini doğru biçimde belirlemiştir. Bununla birlikte, bazı öğrencilerde gözlemlenen kavram yanılgıları; geometri öğretiminde doğru görselleştirme, açık dil kullanımı ve farklı temsillerin önemini bir kez daha vurgulamaktadır. Bu bulgular, öğretmenler için ilkökul geometrisinde yaygın hataları önlemeye yönelik öğretim stratejileri geliştirme açısından yol göstericidir.

5.3 Lisansüstü Matematik Öğrencilerinin Yazılı Açıklamalarının Açıklığı ve Yapısının Kavramsal Anlayışla İlişkisi

Lisansüstü matematik öğrencilerinin yazılı açıklamalarının açıklığı ve yapısal düzeni, genellikle sahip oldukları kavramsal anlayış düzeyiyle yakından ilişkilidir. Düşüncelerin nasıl organize edildiği ve gerekçelendirildiği (metabiliş ve akıl yürütme), öğrencinin kavramları ne ölçüde anladığının bir yansımasıdır. Matematiksel kavramları derinlemesine anlayan öğrenciler, diyagramları doğru ve yerinde kullanma konusunda daha yetkindir.

Buna karşılık, düzensiz ve parçalı açıklamalar çoğu zaman yalnızca işlemsel bilgiye dayalı, yüzeysel bir anlayışa işaret etmektedir. Kavramsal açıdan güçlü öğrenciler ise diyagramları, sembolik gösterimleri ve sözel açıklamaları bütüncül ve tutarlı bir biçimde kullanabilmektedir. Kendi akıl yürütmesini değerlendirebilen ve üzerine düşünebilen öğrenciler, açıklamalarını daha açık ve anlaşılır hâle getirme eğilimindedir.

Bununla birlikte, istisnalar da söz konusudur: Bazı öğrenciler kavramsal olarak yeterli olmalarına rağmen yazılı ifade becerilerinde zorlanabilirken, bazıları ise biçimsel olarak düzgün görünen açıklamalar üretebilmekte ancak derin bir anlayış sergileyemebilmektedir. Bu durum, matematik eğitiminde yalnızca doğru yanıtın değil, bu yanıtın nasıl gerekçelendirildiğinin ve ifade edildiğinin de değerlendirilmesi gerektiğini göstermektedir.

6 Kaynakça

1. Flavell, John H. "Metacognitive Aspects of Problem Solving." In *The Nature of Intelligence*, edited by Lauren B. Resnick, 231–236. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1976.
2. Flavell, John H. "Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive–Developmental Inquiry." *American Psychologist* 34, no. 10 (1979): 906–911. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906>.
3. Garofalo, James, and Frank K. Lester. "Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance." *Journal for Research in Mathematics Education* 16, no. 3 (1985): 163–176. <https://doi.org/10.2307/748391>.
4. Gurat, Melanie Guzman. "Mathematical Problem-Solving Strategies among Student Teachers." *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science* 11, no. 3 (2018): 53–64. <https://doi.org/10.7160/eriesj.2018.110302>.
5. Hargrove, Richard A., and John L. Nietfeld. "The Impact of Metacognitive Instruction on Creative Problem Solving." *Journal of Experimental Education* 83, no. 3 (2015): 291–318. <https://doi.org/10.1080/00220973.2013.876604>.
6. Lestari, W., and Jailani. "Enhancing Mathematical Reasoning Abilities through Metacognitive Strategies." *Journal of Physics: Conference Series* 1097 (2018). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012117>.
7. Mattingly, Eric Shaunn., Trayan N. Kushev, Manju K. Ahuja, and Dalong Ma. "Switch or Persevere? The Effects of Experience and Metacognition on Persistence Decisions." *International Entrepreneurship and Management Journal* 12, no. 4 (2016): 1233–1263. <https://doi.org/10.1007/s11365-016-0391-x>.
8. Kramarski, Bracha, Mevarech, Zemira R., and Arami, Marsel. "The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks." *Educational Studies in Mathematics* 49, no. 2 (2002): 225–250. <https://doi.org/10.1023/A:1016282811724>.
9. Naidoo, Jayaluxmi, ed. *Teaching and Learning in the 21st Century: Embracing the Fourth Industrial Revolution*. Leiden: Brill Sense, 2021. <https://doi.org/10.1163/9789004460386>.
10. Pestry, Andry. "Mental Imagery and Cognitive Processing: Unraveling the Inner Workings of the Mind." *Abnormal Behavior Psychology* 9, no. 5 (2023): 1–2. DOI: 10.37421/2472-0496.2023.9.227.
11. Pólya, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.
12. Presmeg, Norma C. "Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics: Emergence from Psychology." In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, edited by

- Arturo Gutiérrez and Paul Boero, 205–235. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>.
13. Quigley, Alex, Daniel Muijs, and Eleanor Stringer. *Metacognition and Self-Regulated Learning: Guidance Report*. London: Education Endowment Foundation, 2018.
 14. Schoenfeld, Alan H. *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. <https://doi.org/10.4324/9780203062685>.
 15. Schoenfeld, Alan H. “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics.” In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, 165–197. New York: Macmillan, 1992.
 16. Schoenfeld, Alan H. “Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult?” In *Handbook of Cognitive Mathematics*, edited by Marcel Danesi, 763–797. Cham: Springer, 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_10.
 17. Stylianides, Andreas J., and Gabriel J. Stylianides. “Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics.” *The Mathematics Enthusiast* 4, no. 1 (2007): 103–114. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1063>.

