$$\left\|S^{A}(f)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\|D^{\alpha_j}A_j\|_*\right)\|f\|_{L^{p,\varphi}(w)};$$

$$\left\|\mu_{\Omega}^{A}(f)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\|D^{\alpha_j}A_j\|_*\right)\|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}.$$

Sharp Maksimal Fonksiyonlar Yoluyla Bir Sınıf Multilineer İntegral Operatörler İçin Ağırlıklı Eşitsizlikler

Yazar / Editör
Doç. Dr. Ferit GÜRBÜZ

ÖZGÜR YAYINLARI

Sharp Maksimal Fonksiyonlar Yoluyla Bir Sınıf Multilineer İntegral Operatörler İçin Ağırlıklı Eşitsizlikler

Yazar / Editör
Doç. Dr. Ferit GÜRBÜZ

ÖZGÜR
YAYINLARI

Published by
Özgür Yayın-Dağıtım Co. Ltd.
Certificate Number: 45503

15 Temmuz Mah. 148136. Sk. No: 9 Şehitkamil/Gaziantep
+90.850 260 09 97
+90.532 289 82 15
www.ozguryayınlari.com
info@ozguryayinlari.com

Sharp Maksimal Fonksiyonlar Yoluyla Bir Sınıf Multilineer
İntegral Operatörler İçin Ağırlıklı Eşitsizlikler
Yazar / Editör: Doç. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Language: Turkish
Publication Date: 2023
Cover design by Mehmet Çakır
Cover design and image licensed under CC BY-NC 4.0
Print and digital versions typeset by Çizgi Medya Co. Ltd.

ISBN (Paperback): 978-975-447-801-3

DOI: https://doi.org/10.58830/ozgur.pub323

Suggested citation:
Gürbüz, F. (2023). *Sharp Maksimal Fonksiyonlar Yoluyla Bir Sınıf Multilineer İntegral Operatörler İçin Ağırlıklı Eşitsizlikler.* Özgür Publications. DOI: https://doi.org/10.58830/ozgur.pub323. License: CC-BY-NC 4.0

The full text of this book has been peer-reviewed to ensure high academic standards. For full review policies, see https://www.ozguryayinlari.com/

ÖZGÜR
YAYINLARI

Önsöz

Harmonik analiz, fonksiyonel Analiz ve operatör teori alanlarında, klasik operatörlerin (= singüler, maksimal, Riesz potansiyelleri vb.) çeşitli fonksiyon uzaylarındaki eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. Analiz alanında pek çok konunun, çeşitli gereksinmeler sonucu ortaya konularak ve zamanın problemlerine cevap verecek şekilde geliştirilerek olgunlaştırılması, bu konular hakkında birçok çalışmanın ve eserin ortaya çıkmasına da neden olmuştur. Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak kabul edilebileceğinden, Morrey uzayları üzerinde multilineer integral operatörlerin sınırlılığını incelemek doğal ve önemlidir. Bu bağlamda pek çok araştırma Morrey tipi uzaylar teorisindeki bazı boşlukları doldurmak için Morrey uzaylarını temel alan fonksiyon uzaylarına odaklanmaktadır. Pek çok araştırmacı Morrey tipi uzayların, diferensiyel denklemlerle olan ilişkisi ve diferensiyel denklemlerin Morrey tipi uzaylardaki eşitsizliklerde çok kullanılır olması nedenleriyle, Morrey tipi eşitsizlik problemlerine gitgide daha çok girmeye başlamışlardır. Bu nedenle de bu konunun önemi gittikçe artmaktadır. Fakat bu konular buranın kapsamını aştığından burada detayları geçiyoruz. Bu çalışmada, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları üzerinde multilineer operatörlerin sharp (keskin) tahminleri kullanılarak, Littlewood-Paley operatörü ve Marcinkiewicz operatörü ile ilgili bazı multilineer operatörlerin ağırlıklı sınırlılıkları elde edilmiştir. Bu çalışmanın iki amacı vardır. Birincisi, multilineer Littlewood-Paley ve Marcinkiewicz operatörleri için bazı sharp (keskin) eşitsizlikler oluşturmaktır. İkincisi ise bu eşitsizlikleri genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları üzerinde multilineer operatörlerin ağırlıklı sınırlılığını ispatlamak için kullanmaktır. Bu çalışma aynı zamanda reel analiz ve ölçü teorisi hakkında biraz bilgisi olan lisansüstü öğrenciler için de uygundur.

Oldukça güç ve yüksek sorumluluk gerektiren bir işi üstlenmenin getirdiği zorluklara rağmen, ilgili öğrencilere yüksek düzeyde fayda sağlayacağını düşündüğüm bu eseri hazırladığım için çok mutluyum.

Uzun ve yorucu bir çalışma sonrası hazırlanan bu kitabımızda, gerekli titizliğin gösterilmesine rağmen yine de bazı eksik ve yanlışlarımızın olabileceği kuşkusuzdur. Ünlü dilbilimci Pierre Larousse sözlüğünün Fransızca ilk baskısındaki:

“Yanlış ve eksik, sözlüklere tanınmış ayrıcalıktır.”

sözünü bu eser için de kabul edeceğinizi umar, yanlış ve eksikliklerimizi bize bildirmenizi rica ederiz. Ayrıca, bu kitabın yazım sürecinde destek ve anlayışlarıyla her an yanımda olan ve benim bugünlere gelmemde büyük emek ve fedakârlıklarda bulunan canım aileme ve son olarak bu kitaptaki çalışmaları derleyen, toplayan ve okurların istifadesine sunan Özgür Yayınevinin çalışanlarına teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Saygılarımla…..

Doç. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Kırklareli Üniversitesi

Bu kitabı; 1993 yılında elim bir trafik kazasında kaybettiğimiz canım abim Ferdi Gürbüz'e ve 2018 yılında elim bir hastalık sonucu kaybettiğimiz, bana göre dünyanın en iyi babası olan, canım babam Mithat Gürbüz'e ithaf ediyorum.

İçindekiler

Kısım I

SİMGELER DİZİNİ

S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\|B(x,r)\|$	$B(x,r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
supp f	f fonksiyonun desteği
$\|S^{n-1}\|$	Birim kürenin yüzey alanı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$Q(x_0,r)$	Eksenlere paralel kenarlı, x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan bir küp
$L_{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	Kendisi ve bütün türevleri sürekli olan fonksiyonların sınıfı
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de kompakt destekli bütün C^∞ fonksiyonlarının sınıfı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
S_ψ^A	Multilineer Littlewood-Paley operatörü
μ_Ω^A	Multilineer Marcinkiewicz operatörü
$M^\# f(x)$	Sharp maksimal fonksiyonu
w	Ağırlık fonksiyonu
$\mathbb{R}_+$	$(0,\infty)$ aralığı
H	Hilbert dönüşüm operatörü
f_Q	Q da f nin ortalama değeri
$BMO(\mathbb{R}^n)$	Sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonlar uzayı

Kısım II

GİRİŞ ve TEMEL BİLGİLER

Singüler integraller ve maksimal fonksiyonlar konusundaki gelişmeler 20. yüzyılın sonlarında Mihlin, Calderón, Zygmund, Hardy ve Littlewood'un çalışmalarına dayanmaktır. Bu konular, kısmi diferensiyel denklemler, harmonik analiz, fonksiyonel analiz ve operatör teori alanı gibi dallarda geniş yer tutar. Hardy ve Littlewood [12] 1930 yılındaki bir çalışmalarında $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu verildiğinde onun $M(f)(x)$ maksimal fonksiyonunu

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada, $Q(x,r)$; küp, koni, disk veya yuvar olabilir. Ayrıca bu yazarlar makalelerinde $M(f)(x)$ maksimal fonksiyonunun L^p uzaylarındaki konumunu da incelemişlerdir. Daha sonraki yıllarda $M(f)$ fonksiyonunun L^p uzayında Poisson ve Weierstrass integralleriyle ilişkileri verilmiştir (bakınız:[21]). Fakat bu konular bu çalışmanın kapsamını aştığından burada detayları geçiyoruz.

Bu çalışmada önce maksimal fonksiyonlar ile ağırlık fonksiyonlarının özelliklerini verdik. Sonra, x merkezli ve kenarları eksenlere paralel olan r uzunluklu Q küpü üzerindeki bir f fonksiyonunun

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} f(y)\, dy$$

ortalama değerini göz önüne alarak, $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y) - f_Q|\, dy$$

Q üzerinde f fonksiyonunun ortalama salınımını tanımladık. Bunun sharp maksimal operatör ile ilişkisini ele alarak, çalışmamızın esasını oluşturan BMO (**Bounded Mean Oscillation**) uzayını tanımlayarak bu uzayın sharp maksimal fonksiyonu ile ilişkisini verdik. Ayrıca, BMO uzayı ile L^∞ uzayının normlarını karşılaştırdık. Sonra, çalışmamızın temelini oluşturan multilineer Littlewood-Paley ve Marcinkiewicz operatörlerini tanıttık ve özelliklerini inceledik. Daha sonra, çalışmamızda kullandığımız lemmaları ve ana sonucumuzu ispatlarıyla birlikte verdik. Sonuç olarak, bu çalışmanın iki amacı vardır. Birincisi, multilineer Littlewood-Paley ve Marcinkiewicz operatörleri için bazı sharp (keskin) eşitsizlikler oluşturmaktır. İkincisi ise bu eşitsizlikleri genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları üzerinde multilineer operatörlerin ağırlıklı sınırlılığını ispatlamak için kullanmaktır.

Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak kabul edilebileceğinden, Morrey uzayları üzerinde multilineer integral operatörlerin sınırlılığını incelemek doğal ve önemlidir. Bu yüzden, Morrey tipi uzaylara ve multilineer operatorlere harmonik analiz alanında büyük ilgi duyulduğu ve birçok yazar tarafından geniş çapta çalışıldığı iyi bilinmektedir (bakınız:[6, 9, 11, 14]). [6] de multilineer singüler integral operatorlerin sınırlılığı elde edimiştir. [14] de multilineer singüler integral operator için değişken sharp tahminler elde edilmiştir. [17, 18] de, yazarlar multilineer komütatörler için bazı sharp (keskin) tahminler elde etmişlerdir.

Diğer taraftan, ağırlıklı eşitsizlikler Fourier analizinde önemli bir yere sahip olup çok çeşitli uygulamalara sahiptir. Özellikle, ağırlık teorisi Lipschitz bölgeleri üzerinde Laplace denklemi için sınır değer problemleri çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Ağırlıklı eşitsizliklerin diğer uygulamaları extrapolasyon teorisi, vektör değerli eşitsizlikler ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bazı sınıfları için hesaplamaları içerir. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L^p(w) \equiv L^p(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı L^p uzayını kendi üzerine dönüştüren Muckenhoupt karakterizasyonu, A_p sınıfının tanımlanmasına ve ağırlıklı eşitsizlerin gelişmesine yardımcı olmuştur.

Bir ağırlık fonksiyonu, hemen her yerde pozitif lokal integrallenebilen $w : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ bir fonksiyondur. Buradan ağırlıkların sadece sıfır Lebegue ölçülü bir küme üzerinde sıfır ya da sonsuz olduğu anlaşılır. Eğer w bir ağırlık ve $1/w$ lokal integrallenebilir ise bu durumda $1/w$ fonksiyonu da bir ağırlıktır.

Verilen bir w ağırlığı ve bir E ölçülebilir kümesi için

$$w(E) = \int_E w(x)\, dx$$

notasyonunu E kümesinin w-ölçüsünü göstermek için kullanacağız. Ağırlıklar lokal integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından bir yuvar tarafından içerilen bütün E kümeleri için $w(E) < \infty$ olur.

Çalışma boyunca, φ, $\mathbb{R}_+$ üzerinde pozitif, artan bir fonksiyonu ifade edecek ve $t \geq 0$ için

$$\varphi(2t) \leq C\varphi(t) \tag{1}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır diyeceğiz. Yukarıdaki (1) eşitsizliğini sağlayan φ fonksiyonuna doubling şartını sağlar diyeceğiz ve φ bu şartı sağladığında kısalık için $\varphi \in \Delta_2$ biçiminde yazacağız.

Şimdi bazı gerekli tanımları ve notasyonları verelim. Bu çalışma boyunca Q, $\mathbb{R}^n$ de kenarları eksenlere paralel olan bir küpü ifade edecektir. $Q = Q(x_0, r)$ ile x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan küpü göstereceğiz. Verilen bir Q küpü ve $\delta > 0$ için δQ ile Q nun merkezine sahip ve kenar uzunluğu Q nun kenar uzunluğunun δ katı olan küpü göstereceğiz. Ayrıca, çalışma boyunca C farklı sabitleri gösterecektir.

Matematiksel analizde, küme üzerindeki bir ölçü, bu kümenin her bir uygun alt kümesine bir sayı atamanın sistematik bir yoludur ve sezgisel olarak kümenin boyutu olarak yorumlanır. Bu anlamda ölçü; uzunluk, alan ve hacim kavramlarının bir genelleştirmesidir diyebiliriz. Her α reel değeri için $\{x : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçülebilirdir.

Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçüsü $|E| = \int\limits_E dx$ ile ve E nin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \text{ ise} \\ 0 & x \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

ile gösterilir. Örnek olarak, 3-boyutlu uzayda $S : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ küresi düşünülürse, bu kürenin ölçüsü onun hacmidir ve $36\pi br^3$ dür. Ancak S nin yüzeyi Γ ile gösterilirse Γ 3-boyutlu uzayda dejenere bölge olarak adlandırılır ve ölçüsü sıfırdır. Sonuç olarak $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küre yüzeyinin ölçüsü sıfırdır. Benzer şekilde, $n = 2$ olduğunda $S : x^2 + y^2 \leq 9$ diskinin ölçüsü onun alanıdır ve sınırının ölçümü sıfırdır. 1-boyutlu uzayda $S = [a, b]$ ise ölçüsü aralığın uzunluğu, yani $b - a$ ve sınırının ölçümü, yani $\Gamma = \{a, b\}$ nin ölçüsü sıfırdır.

$\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı; $x.y = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere tüm $x = (x_1, ..., x_n)$ noktalarının kümesidir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. x' ile her zaman x e karşılık gelen birim vektörünü kastedeceğiz, yani, herhangi bir $x \neq 0$ için $x' = \frac{x}{|x|}$ dir. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, n boyutlu $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ Öklid uzayında birim küreyi ve dx' onun yüzey ölçüsünü temsil eder.

Tanım 0.1 *X bir lineer uzayı olsun. Eğer bir*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \qquad x \to \|x\|$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$ *ve* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(N2)$ $\|ax\| = |a|\,\|x\|$, $(\alpha \in F)$
$(N3)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Burada, F reel ve kompleks sayılar cismini göstermektedir.

X bir lineer uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon norm şartlarında $(N1)$ şartını sağlamazsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir yarı-norm denir.

Örnek 0.1 *Eğer normlu bir uzayda x ve y vektörleri için $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ise bu durumda tüm λ, $\mu \geq 0$ skalerleri için $\|\lambda x + \mu y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\|$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm 0.1 *Eğer $\lambda \geq \mu$ ise, bu durumda*

$$\begin{aligned} \lambda\|x\| + \mu\|y\| &\geq \|\lambda x + \mu y\| = \|\lambda(x+y) + (\mu - \lambda) y\| \\ &\geq \lambda\|x+y\| - (\lambda - \mu)\|y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, tüm λ, $\mu \geq 0$ için $\|\lambda x + \mu y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\|$ eşitliği sağlanır.

Örnek 0.2 *$f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ için $\|f\| = |f(a)| + |f(b)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ ifadesi bir norm olur mu? Araştırınız.*

Çözüm 0.2 1. *$|f(a)| \geq 0$, $|f(b)| \geq 0$, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \geq 0$ olduğundan $\|f\| \geq 0$ olur.*

2. *$\|f\| = 0$ olsun. Bu durumda, $|f(a)| = 0$, $|f(b)| = 0$, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| = 0$ olur. Buradan, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f''(x) = 0$ olur.*

$\forall x \in [a,b]$ için $f''(x) = 0$ ise $f'(x) = c_1$ ve $f(x) = c_1 x + c_2$ olacak biçimde c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ vardır. $f(a) = 0$ ve $f(b) = 0$ olduğundan $a \neq b$ için $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. Buradan, $f = 0$ elde edilir. Ayrıca, $f = 0$ ise $\|f\| = 0$ olacağı zaten açıktır.

3. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= |(\alpha f)(a)| + |(\alpha f)(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left|((\alpha f))''(x)\right| \\ &= |a|\,|f(a)| + |a|\,|f(b)| + \max_{x\in[a,b]} |\alpha| \left|f''(x)\right| \\ &= |a|\,\|f\| \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4. *$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$?*

$$
\begin{aligned}
\|f+g\| &= |(f+g)(a)| + |(f+g)(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left|(f+g)''(x)\right| \\
&= |f(a)+g(a)| + |f(b)+g(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)+g''(x)\right| \\
&\leq |f(a)| + |g(a)| + |f(b)| + |g(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left(\left|f''(x)\right| + \left|g''(x)\right|\right) \\
&\leq \left[|f(a)| + |f(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|\right] \\
&\quad + \left[|g(a)| + |g(b)| + \max_{x\in[a,b]} \left|g''(x)\right|\right] \\
&= \|f\| + \|g\|
\end{aligned}
$$

olduğundan $\mathcal{C}^2[a,b]$ *üzerinde* $\|f\|$ *bir norm tanımlar.*

Tanım 0.2 ***(Homojen Fonksiyonlar)*** *Birkaç değişkenli bir* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *fonksiyonu, keyfi* λ *için*

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu fonksiyona homojen fonksiyon denir. Burada, m *sayısı homojenlik derecesidir. Örneğin,* $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}}$ *fonksiyonu için homojenlik derecesi* $m = 2$ *ve* $f(x,y) = \frac{x+z}{2x-3y}$ *fonksiyonu için homojenlik derecesi ise* $m = 0$ *dır.*

Tanım 0.3 *Bir* T *lineer operatörü aşağıdaki özellikleri gerçekleyen operatördür:*

(i) T *nin* $D(T)$ *tanım bölgesi bir vektör uzayı olup* $R(T)$ *değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.*

(ii) *Her* $x, y \in D(T)$ *ve* α *skaleri için,*

$$
\begin{aligned}
T(x+y) &= Tx + Ty \\
T(\alpha x) &= \alpha Tx
\end{aligned}
$$

gerçeklenir.

Örnek 0.3 $T : X \to Y$ *iki vektör uzayı arasında bire-bir ve örten bir operatör olsun.* T^{-1} *nin (*T *nin tersi) lineer bir operatör olduğunu gösteriniz.*

Çözüm 0.3 $G : Y \to X$, T *nin tersini göstersin. Yani,* $TG = I_Y$ *ve* $GT = I_X$ *dir.* a, $b \in Y$ *ve* ξ *bir skaler olsun.* G *nin toplanabilirliği için*

$$T[(Ga + Gb)] = TGa + TGb = a + b = T[G(a+b)]$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Burada, T bire-bir olduğundan

$$G(a+b) = G(a) + G(b)$$

olur. Yani, G toplanabilirdir. Benzer şekilde, G nin homojenliği için

$$T[G(\alpha a)] = \alpha a = \alpha T G a = T[\alpha G a]$$

ve dolayısıyla

$$G(\alpha a) = \alpha G(a)$$

olduğunu gözlemleyebiliriz. Yani, G homojendir. Dolayısıyla, $G = T^{-1}$ lineer bir operatördür.

Tanım 0.4 *X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.*

Örnek 0.4 *Eğer $T : X \to Y$ normlu uzaylar arasında sınırlı operatör ise bu durumda tüm $x \in X$ için*

$$\|T\| = \min\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 0.4 *Tüm $x \in X$ için*

$$C_0 = \min\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

olsun. Aslında yukarıdaki eşitlikte infimumun minimum olduğu unutulmamalıdır. Şimdi, tüm $x \in X$ için eğer $C \geq 0$

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq C$$

olur ve bu yüzden

$$\|T\| \leq C_0$$

dır. Diğer taraftan, her $x \in X$ *için*

$$\|Tx\| \leq C\,\|x\|$$

eşitsizliği

$$C_0 \leq \|T\|$$

eşitsizliğini gerektirir. Böylece,

$$\|T\| = C_0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 0.5 X *bir küme olsun.* X *in alt kümelerinin bir* $\mathcal{A}$ *sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa* X *üzerinde bir cebir olarak adlandırılır:*
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) *Her* $A \in \mathcal{A}$ *için* $A^c = X - A \in \mathcal{A}$
(iii) $j = 1, 2, ..., n$ *için* $A_j \in \mathcal{A}$ *ise* $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$
(iii) *şartının yerine, her* $j \in \mathbb{N}$ *için* $A_j \in \mathcal{A}$ *ise* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ *şartı alınırsa* $\mathcal{A}$ *cebirine bir* σ*-cebiri denir.*

Örnek 0.5 $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ X *üzerinde bir* σ*-cebir olsun.* $\emptyset \neq B \in \mathcal{A}$ *olmak üzere*

$$\Sigma := \{A \subset X : A = B \cap C,\ C \in \mathcal{A}\}$$

sınıfı B *kümesi üzerinde* σ*-cebir midir?*

Çözüm 0.5 (i) $B \in \Sigma$ *?*

$B = B \cap B$, $C = B \in \mathcal{A}$ *olup* $B \in \Sigma$ *dir veya* $B = B \cap X$, $C = X \in \mathcal{A}$ *olup* $B \in \Sigma$ *dir.*

(ii) $\forall A \in \Sigma$ *için* $A^t = B - A \in \Sigma$ *?*

$A \in \Sigma$ *olsun. Bu durumda,* $A = B \cap C$ *olacak biçimde* $C \in \mathcal{A}$ *dır. Buradan,* $\mathcal{A}$ X *üzerinde bir* σ*-cebir olduğundan* $C^t \in \mathcal{A}$ *olur. Diğer taraftan,* $A^t = B - A = B \cap A^t = B \cap (B \cap C)^t = B \cap C^t$ *ve* $C^t \in \mathcal{A}$ *olduğundan* $A^t = B - A \in \Sigma$ *elde ederiz.*

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \in \Sigma$ *ise* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ *?*

$\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \in \Sigma$ *olsun. Bu durumda,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n = B \cap C_n$ *olacak biçimde* $C_n \in \mathcal{A}$ *dır. Buradan,* $\mathcal{A}$ X *üzerinde bir* σ*-cebir olduğundan* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}$ *olur. Diğer taraftan,* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B \cap C_n) = B \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n\right)$ *ve* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}$ *olduğundan* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ *olur.*

Sonuç olarak, Σ*,* B *kümesi üzerinde* σ*-cebirdir.*

Örnek 0.6 *Bir X kümesi üzerindeki σ-cebirlerinin birleşimi de X üzerinde bir σ-cebiri midir? Açıklayınız.*

Çözüm 0.6 $X = \{1, 2, 3\}$ *olsun.*

$$\mathcal{A}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

ve

$$\mathcal{A}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$$

sınıfları X üzerinde bir σ-cebirdir. Fakat,

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

sınıfı X üzerinde bir σ-cebiri değildir. Çünkü, $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ dir.

Tanım 0.6 *Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan α-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.*

Örnek 0.7 *$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ Borel cebirinin, r uç noktaları $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar olan $(-\infty, r]$ aralıkları tarafından da üretilebileceğini gösteriniz.*

Çözüm 0.7 *$r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $(-\infty, r]$ aralıklarının ürettiği σ-cebir $\mathfrak{B}_1$ olsun. Burada, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ olduğunu göstermeliyiz.*

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, a]$ aralıklarının ürettiği σ-cebir $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dir. O halde, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, a] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dir.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğundan $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $(-\infty, r]$ biçimindeki kümelerin oluşturduğu sınıfı $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ içerdiğine göre, bu sınıfı içeren en küçük σ-cebir $\mathfrak{B}_1$ olduğuna göre $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dir.

Şimdi de $a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, a] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ alalım. Ayrıca, her reel sayıya yakınsayan bir rasyonel sayı dizisi olduğundan, yani $a \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $r_n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $r_1 > r_2 > \cdots > r_n > \cdots$ ve $\lim\limits_{n} r_n = a$ olacak şekilde bir (r_n) dizisi alabiliriz. Buradan, $\mathfrak{B}_1$ σ-cebir olduğundan

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, r_n] \in \mathfrak{B}_1$$

olur. Halbuki $(-\infty, a]$ tipindeki aralıkları içeren en küçük σ-cebir $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ olduğuna göre $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{B}_1$ bulunur.

Sonuç olarak, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ elde ederiz.

Tanım 0.7 *X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ-cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeyede $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.*

Tanım 0.8 *$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$
(iii) Her ayrık A_n dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Örnek 0.8 *$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay ve (μ_n) ölçü dizisi için $\mu_n(X) = \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı*

$$\psi(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(A)$$

dönüşümü ölçü müdür? Ayrıca $\psi(X)$ değerini bulunuz.

Çözüm 0.8 1. $\psi(\emptyset) = 0$ *?*

$\psi(\emptyset) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(\emptyset) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n .0 = 0$

2. $\forall A \in \mathcal{A}$ *için* $\psi(A) \geq 0$ *?*

$\forall A \in \mathcal{A}$ *ve* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\mu_n(A) \geq 0$ *olduğundan* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(A) \geq 0$ *gerçeklenir.*

3. $\forall m \in \mathbb{N}$, *için* (A_m) $\mathcal{A}$ *daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun.* (μ_n) *ölçü dizisi olduğundan*

$$\begin{aligned}
\psi\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A_m)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(A_m)\right] \qquad (2) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \psi(A_m)
\end{aligned}$$

olup ψ*,* $\mathcal{A}$ *üzerinde bir ölçüdür. (2) de* $\mu_n(A_m) \leq \mu_n(X) = \frac{1}{2}$ *ve* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 < \infty$ *serisi yakınsak olduğundan serilerin yerleri değiştirilebilir.*

Diğer taraftan,

$$\psi(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

olur.

Tanım 0.9 *Bir* X *kümesi,* X *in alt kümelerinin bir* $\mathcal{A}$ σ*-cebiri ve* $\mathcal{A}$ *üzerinde tanımlı bir* μ *ölçüsünden oluşan* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.*

Tanım 0.10 X *bir küme ve* $P(X)$ *de* X *in kuvvet kümesi olsun.* $P(X)$ *üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir* μ^* *fonksiyonu*
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) *Her* $E \in P(X)$ *için* $\mu^*(E) \geq 0$
(iii) $A \subset B \subset X$ *için* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv) *Her bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \in P(X)$ *ise* $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* *fonksiyonuna* X *üzerinde bir dış ölçüdür denir.*

Örnek 0.9 $P(\mathbb{R})$ *üzerinde tanımlı*

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ +\infty & , \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

dönüşümü bir dış ölçü müdür? Gösteriniz.

Çözüm 0.9 (1) $\mu_1^*(\emptyset) = 0$ *olduğu tanımdan açıktır.*

(2) $\forall A \in P(\mathbb{R})$ *için* $\mu_1^*(A) \geq 0$ *olduğu tanımdan açıktır.*

(3) $A, B \in P(\mathbb{R})$ *ve* $A \subset B \subset \mathbb{R}$ *için* $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ *?*

$\cdot$ $A = \emptyset$ *ise* $B = \emptyset$ *ya da* $B \neq \emptyset$ *dır. O halde,* $\mu_1^*(A) = \mu_1^*(\emptyset) = 0$, $\mu_1^*(B) = 0$ *ya da* $\mu_1^*(B) = +\infty$ *olur. Yani,* $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ *gerçeklenir.*

$\cdot$ $A \neq \emptyset$ *ise* $B \neq \emptyset$ *olmak zorundadır. Dolayısıyla,* $\mu_1^*(A) = +\infty$ *ve* $\mu_1^*(B) = +\infty$ *olup* $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ *gerçeklenir.*

(4) *Her bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \in P(\mathbb{R})$ *ise* $\mu_1^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n)$ *?*

$\cdot$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n = \emptyset$ *olsun. Bu durumda,* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ *olup* $\mu_1^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ *olur. Ayrıca,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n) = 0 + 0 + \cdots = 0$ *olduğundan istenilen eşitsizlik sağlanır.*

· $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *öyle ki* $\forall n \leq n_0$ *için* $A_n \neq \emptyset$ *ve* $\forall n > n_0$ *için* $A_n = \emptyset$ *olsun. Bu durumda,*

$$\mu_1^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu_1^* \left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \right) = +\infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^* \left(A_n \right) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_1^* \left(A_n \right) = +\infty + \cdots + \infty = +\infty$$

olur. Böylece istenilen eşitsizlik sağlanır.

· $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda,* $\mu_1^* \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) = +\infty$ *ve* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^* \left(A_n \right) = +\infty$ *olduğundan istenilen eşitsizlik elde edilir.*

Dolayısıyla μ_1^*, $P\left(\mathbb{R}\right)$ *üzerinde bir dış ölçüdür.*

Tanım 0.11 (I_k), $\mathbb{R}$ *nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,*

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P\left(\mathbb{R}\right)$ *üzerinde*

$$\lambda^* \left(A \right) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l \left(I_k \right) : \left(I_k \right) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* *bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü* $\mathbb{R}$ *nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. Yani,* $I \subset \mathbb{R}$ *bir aralık ise*

$$\lambda^* \left(I \right) = l \left(I \right)$$

dır. $\mathbb{R}^n$ *üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü ise her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.*

Sonuç 0.1 *A sayılabilir bir küme ise* $\lambda^* \left(A \right) = 0$ *dır.*

Örnek 0.10 λ^* *Lebesgue dış ölçüsünün ötelemeye göre değişmediğini, yani* $\forall x \in \mathbb{R}$ *için*

$$\lambda^* \left(A + x \right) = \lambda^* \left(A \right)$$

olduğunu gösteriniz. Burada,

$$A + x = \{ a + x : a \in A \}$$

dır.

Çözüm 0.10

$$\tau_A = \left\{ (I_k) = (a_k, b_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) : (I_k) \in \tau_A \right\} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\tau_{A+x} = \left\{ (I_k + x) = (a_k + x, b_k + x) : A + x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k + x) \right\}$$

olup

$$\begin{aligned} \lambda^*(A+x) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(a_k + x, b_k + x) : (a_k + x, b_k + x) \in \tau_{A+x} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) : (a_k, b_k) \in \tau_A \right\} = \lambda^*(A) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 0.12 $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$, *$\lambda^*$ dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olmak üzere λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ Borel sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir ve λ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.*

Örnek 0.11 $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *ölçü uzayı olmak üzere*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{1}{2^n} \right\}$$

ile verilen kümenin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm 0.11 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ *dersek,* $I_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^{n+1}} \le x < \frac{1}{2^n}\right\}$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\
I_2 &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{8} \le x < \frac{1}{4}\right\} = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olup (I_n) *küme dizisi ayrıktır.* λ *ölçü ve* (I_n) *ayrık bir dizi olduğundan*

$$
\begin{aligned}
\lambda(A) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Tanım 0.13 $(X, \mathcal{A})$ *bir ölçülebilir uzay olsun.* $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu ölçülebilirdir*$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

dir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ *ile gösterilir.*

Örnek 0.12 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ölçülebilir fonksiyon ve* $c > 0$ *olsun.*

$$
f_c(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \le c \\ c & , \quad f(x) > 0 \\ -c & , \quad f(x) < -c \end{cases}
$$

şeklinde tanımlanan f_c *fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz*

Çözüm 0.12 $\cdot\ \alpha < -c$ *ise* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$\cdot\ -c \le \alpha < c$ *ise* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = (a_1, \infty) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(\alpha) = a_1 \in \mathbb{R}$

$\cdot\ \alpha \ge c$ *ise* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

olup f_c *fonksiyonu Borel ölçülebilirdir.*

Tanım 0.14 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme(özellik) ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme (özellik) hemen her yerde doğrudur denir. Hemen hemen her yerde deyimi, kısaca h.h.y biçiminde yazılır.* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), |\cdot|)$ *bir ölçü uzayı olsun. Daha basit anlatımla,* $G \subset F \subset \mathbb{R}^n$ *ölçülebilir kümeler ve* G *nin Lebesgue ölçüsü* $|G| = 0$ *olsun. Bu durumda* $F \setminus G$ *kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik* F *kümesinin hemen her yerinde sağlanıyor denir.*

Tanım 0.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *bir ölçü uzayı ve* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ *olsun. Eğer* $\int\limits_X f^+ d\mu$ *ve* $\int\limits_X f^- d\mu$ *integrallerinin her ikisi de sonlu ise* f *fonksiyonuna* X *üzerinde* μ *ye göre integrallenebilirdir denir ve bu integral*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. Bu tanımda, $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\lambda = \mu$ *Lebesgue ölçüsü olarak alınırsa elde edilen integrale Lebesgue integrali adı verilir ve bu integral* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ *veya* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d(\lambda(x))$ *ile gösterilir.*

Örnek 0.13 $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *ölçü uzayı olmak üzere*

$$f(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \ln x & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon için $\int\limits_{[1,e^2]} f d\lambda$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm 0.13 $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ *olduğundan h.h.y* $f(x) = \ln x$ *gerçeklenir. Bu yüzden,* $\int\limits_{[1,e^2]} f d\lambda = \int\limits_{[1,e^2]} \ln x d\lambda$ *olmalıdır. Ayrıca,* $g(x) = \ln x$ *fonksiyonu* $[1, e^2]$ *aralığında h.h.y sürekli olup Riemann anlamında integrallenebilir olduğundan Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir ve bu iki integralin değeri çakışıktır. Dolayısıyla,*

$$\int\limits_{[1,e^2]} f d\lambda = \int\limits_{[1,e^2]} \ln x d\lambda = \int\limits_{[1,e^2]} \ln x dx = x \ln x - x \,|_1^{e^2} = e^2 + 1$$

olarak bulunur.

Tanım 0.16 ***(Lebesgue Uzayı)*** *$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.*

$$L^p\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{f:\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx<\infty,\ 1\leq p\leq\infty\right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir ve $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\begin{cases}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} & ,\quad 1\leq p<\infty\\ \operatorname*{esssup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)| & ,\quad p=\infty\end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned}\operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)| &= \inf\left\{\lambda>0:|f(x)|\leq\lambda,\ h.h.y\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda>0:\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\right\}\right|=0\right\}\end{aligned}$$

ile verilir. Örneğin,

$$f(x)=\begin{cases}2x & ,\quad x\in\mathbb{Q}\\ 2 & ,\quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

olsun. Bu durumda hemen her yerde $|f(x)|\leq 2$ olduğundan $\operatorname{esssup}|f(x)|=2$ *dir. Böylece, $f\in L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ dir.*

$L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ lineer bir uzaydır. Gerçekten, $f,g\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olsun.

1−

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\alpha f(x)|^p\,dx=|\alpha|^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx<\infty,$$

2−

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)+g(x)|^p\,dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^p dx\\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[2\max\left(|f(x)|,|g(x)|\right)\right]^p dx\\ &\leq 2^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right)dx\\ &= 2^p\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^p\,dx\right)\\ &< \infty\end{aligned}$$

olduğundan $L^p(\mathbb{R}^n)$ *lineer bir uzaydır.*

Tanım 0.17 ***(Hölder Eşitsizliği)*** f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ölçülebilir fonksiyonlar,* $1 < p < \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *olmak üzere* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *ise* $fg \in L(\mathbb{R}^n)$ *dir ve*

$$\|fg\|_{L(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 0.18 ***(İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği)*** $1 \leq p < \infty, (X, \mu)$ *ve* (Y, ν) *ölçülebilir uzaylar olsun.* f, $(X, \mu) \times (Y, \nu)$ *çarpım uzayı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere*

$$\left(\int\limits_Y \left(\int\limits_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right)^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_X \left(\int\limits_Y |f(x,y)|^p\, d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe göre

$$\left\| \int \cdot \right\|_{L^p(Y)} \leq \int \|\cdot\|_{L^p(Y)}$$

dir. Burada, $X = \mathbb{R}^n$ *ve* $Y = \mathbb{R}^m$ *olarak alınırsa,* f, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *üzerinde ölçülebilir olsun.* $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere hemen her* $y \in \mathbb{R}^n$ *için* $f(.,y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ *ve* $y \to \|f(.,y)\|_{p,\mathbb{R}^m}$ *fonksiyonu* $L(\mathbb{R}^n)$ *ye ait olsun. Bu durumda* $x \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy$ *fonksiyonu* $L^p(\mathbb{R}^m)$ *ye aittir ve*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

gerçeklenir, yani

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(.,y)\, dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(.,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}\, dy$$

ile verilir

Tanım 0.19 ***(Fubini)*** *$\mu \geq 0$, $\upsilon \geq 0$ olmak üzere (X,μ) ve (Y,υ) ölçü uzayları ve $\mu \otimes \upsilon$, $X \times Y$ üzerinde tanımlı çarpım ölçüsü olsun. Bu durumda $F(x,y)$, $\mu \otimes \upsilon$-integrallenebilir ise*

$$\begin{aligned} \int\int_{X\times Y} F(x,y)d\mu \otimes \upsilon &= \int_X \left(\int_Y F(x,y)d\mu \right) d\upsilon \\ &= \int_Y \left(\int_X F(x,y)d\upsilon \right) d\mu \end{aligned} \tag{3}$$

eşitliği sağlanır. Burada $X = Y = \mathbb{R}$ ise $\mu = \upsilon$ Lebesgue ölçüsüdür. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ de $\mu \otimes \upsilon = dx_1dx_2$ dir.

Örnek 0.14 *$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ve $R : 0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ için $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini hesaplayınız.*

Çözüm 0.14 *Verilen fonksiyon $(0,0)$ noktasında süreksiz olduğundan (3) formülü kullanılamaz. Aslında, bu durumu kontrol ettiğimizde şunu elde ederiz:*

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\,dA &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \arctan y \,|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dydx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= -\arctan x\ |_0^1 = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Örnek 0.15 $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ *ve* $R : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$ *için* $\iint_R f(x,y)\,dA$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm 0.15

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy,\ y \neq 0 \\
&= \int_{-1}^1 0dy = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx,\ x \neq 0 \\
&= \int_{-1}^1 0dx = 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = 0$$

elde edilir. Ancak kare üzerinde Lebesgue çift katlı integrali mevcut değildir. Çünkü

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|dxdy \geq \int_{0}^{1}dr\int_{0}^{2\pi}\left(\sin\phi\cos\phi/r\right)d\phi = 2\int_{0}^{1}dr/r = \infty$$

dur.

Örnek 0.16 *$i=1,2$ için $X_i=\mathbb{N}$ (doğal sayılar), $M_i=2^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ nin tüm alt kümelerinin σ-cebirleri) ve μ_i ler sayılabilir ölçü olsun. $f : X_i \times X_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(i,j) = \begin{cases} -2^{-i} & , \quad j=i \\ 2^{-i} & , \quad j=i+1 \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\int_{X_i}\left(\int_{X_2} f d\mu_2\right)d\mu_1$$

ve

$$\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f d\mu_1\right)d\mu_2.$$

integrallerini hesaplayınız. Cevaplarınızı Fubini teoremiyle nasıl bağdaştırırsınız?

Çözüm 0.16 *Herhangi bir $i \in X_i$ için $j \to f(i,j)$ integrallenebilirdir ve*

$$\int_{X_2} f(i,j)\,d\mu_2(j) = -2^{-i}+2^{-i} = 0$$

olur. Böylece,

$$\int_{X_i}\left(\int_{X_2} f d\mu_2\right)d\mu_1 = 0$$

elde edilir.

Herhangi bir $j \in X_2$ için $i \to f(i,j)$ integrallenebilirdir ve

$$\int_{X_1} f(i,1)\,d\mu_1(i) = -\frac{1}{2}$$

olur.

Tanım 0.20 ***(Destek)***

Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve supp $f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır. supp f sınırlıysa, bu durumda $f \in C_0$; $\mathcal{C}^n$, n-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayını gösterir üzere $\mathcal{C}_0^n = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}^n$ olur. Benzer şekilde, ; $\mathcal{C}^\infty$ kendisi ve bütün türevleri sürekli olan fonksiyonların sınıfı olmak üzere, $\mathcal{C}_0^\infty = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}^\infty$ da $\mathbb{R}^n$ de kompakt destekli bütün C^∞ fonksiyonlarının sınıfını gösterir. Sonuç olarak, ölçülebilir bir fonksiyonun desteğinin sınırlı olduğunu söylemek, onun $\mathbb{R}^n$ nin kompakt bir alt kümesi olduğunu söylemekle ve fonksiyonun $\mathbb{R}^n$ 'nin kompakt bir alt kümesinin dışında hemen her yerde sıfır olduğunu söylemekle eşdeğerdir. Ancak bu durumda, fonksiyonun kompakt olarak desteklendiğini veya kompakt desteğinin olduğunu söyleyebiliriz. f nin $\mathbb{R}^n$ de sürekli olması durumunda, desteğinin $\mathbb{R}^n$ deki en küçük kapalı küme olduğunu görmek kolaydır, bunun dışında f hemen her yerde 0 dır. Örneğin, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kompakt destekli, sonsuz türevlenebilir bir fonksiyonun klasik bir örneği; desteği $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ birim yuvar olan

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \ \ (x \in B(0,1)) \ \textit{ise} \\ 0 & |x| \geq 1 \ \ (x \notin B(0,1)) \ \textit{ise} \end{cases}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. *$h \in \mathcal{C}_0^\infty$ dir.*
2. *h negatif değildir ve supp $h = \overline{B(0,1)}$ dir.*
3. *h radyaldır. Yani, $|x| = |y|$ olduğu zaman $h(x) = h(y)$ dir.*
4. *C sabitini uygun bir şekilde seçersek. $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dm(x) = 1$ dir.*

$\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde bir f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n$$

ile gösterilir. Çok katlı bir integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır.

$r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : \ |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterilim.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx, \qquad dx = dx_1 ... dx_n$$

integralinin hesabı için;

$0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_k \leq \pi$, $k = 1, ..., n-2$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ ve $x' = (\theta_1, ..., \theta_{n-1}) \in S^{n-1}$ olmak üzere $2 \leq k \leq n-2$ için

$$\begin{aligned}
x_1 (r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_1 \\
x_2 (r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
x_3 (r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \vdots \\
&\vdots \\
x_k (r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 ... \sin \theta_{k-1} \cos \theta_k \\
x_n (r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 ... \sin \theta_{n-1}
\end{aligned}$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r,\ \theta_1, ...,\ \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır. Böylece f, $\mathbb{R}^n$ de integrallenebilirdir, yani,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} f(r) J(r, \theta) dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j} d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \left| S^{n-1} \right| \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$\int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j} d\theta_1 ... d\theta_{n-1} = \int_{S^{n-1}} dx' = \left| S^{n-1} \right|$$

birim kürenin yüzey alanıdır ve böylece

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} f(rx')\, dr dx' \tag{4}$$

olur, burada dx', S^{n-1} üzerindeki yüzey alanı elemanı olarak adlandırılır. Genel olarak

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f\left(r\sin\theta_1,\ ...,\ r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1}\right) r^{n-1} dr d\theta_1...d\theta_{n-1} \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r,\theta) r^{n-1} d\sigma dr\end{aligned}$$

biçimde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Özel bir durum olarak, dm, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü ve $d\sigma$, S^{n-1} üzerindeki standart yüzey ölçüsü ise, aşağıdaki formülü yazabiliriz

$$\int\limits_{B(x,R)} f(y)\, dm(y) = \int\limits_0^R \int\limits_{S^{n-1}} f(x+rt)\, d\sigma(t)\, r^{n-1} dr.$$

$S(x,r)$ üzerinde yüzey ölçüsü dS ye göre integrallenebilir tüm f fonksiyonları için, f nin yüzey ortalama değeri

$$\mathcal{M}_f^r(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} f(x+rt)\, d\sigma(t) = \frac{1}{|S^{n-1}|\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x,r)} f(y)\, dS(y) \qquad (5)$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $B(x,r)$ yuvarı üzerinde dm ye göre integrallenebilir tüm f fonksiyonları için, f nin uzay ortalama değeri

$$\mathcal{A}_f^r(x) = \frac{1}{|S^n|} \int\limits_{B(0,1)} f(x+ry)\, dm(y) = \frac{1}{|S^n|\, r^n} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, dm(y)$$

ile tanımlanır. (5) deki formülden,

$$\mathcal{A}_f^R(x) = \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \mathcal{M}_f^r(x)\, r^{n-1} dr$$

elde ederiz.

Sonuç 0.2 $r = |x|$ *olsun ve* $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ *ile birim küreyi gösterelim.* dx *hacim elemanını* $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ *biçiminde yazarız, burada* $d\sigma$, S^{n-1} *üzerinde* dx *tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür. Bu durumda eğer* $f(x) \geq 0$

integrallenebilir bir fonksiyon ise Fubini teoreminden

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,d\sigma \right\} r^{n-1}dr = \int\limits_{S^{n-1}} \left\{ \int\limits_0^\infty f(x)\,r^{n-1}dr \right\} d\sigma$$

elde edilir. Eğer $x \neq 0 = (0,...,0)$ *ise bu durumda* $x = |x|\frac{x}{|x|} = rx'$ *dir, burada* $x' = \frac{x}{|x|}$, S^{n-1} *üzerinde* x *in izdüşümüdür.* S^{n-1} *üzerindeki değişkeni çoğu kez* x' *ile gösterdiğimizden* $d\sigma$ *yerine* dx' *yazmak uygundur. Örnek olarak,*

$$\begin{aligned} |B(0,2)| &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} r^{n-1}drd\sigma = \int\limits_{S^{n-1}} dx' \int\limits_0^2 r^{n-1}dr \\ &= \left|S^{n-1}\right| \frac{2^n}{n} \end{aligned}$$

biçimindedir, burada $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{-\left(\frac{n}{2}\right)}$, $\mathbb{R}^n$ *de yarıçapı* 1 *olan* S^{n-1} *birim küresinin yüzey alanıdır.* $\Gamma(n)$, *gamma fonksiyonudur ve* $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ *ile tanımlanır. Ayrıca daha genel olarak,* $B = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ *kümesi merkezi* x, *yarıçap uzunluğu* r *olan açık yuvarı ve* $B(x,r)^C$ *onun tümleyenini göstersin.* $|S^n| = |B(0,1)|$ *olmak üzere*

$$|B(x,r)| = |S^n|\,r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{-\left(1+\frac{n}{2}\right)} r^n = \frac{1}{n}\left|S^{n-1}\right| r^n$$

biçiminde yazabiliriz.

Lemma 0.1 $n > 1$ *için,* $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ *ve* $|S^n| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ *eşitlikleri sağlanır. Buradan,* $|S^{2m}| = \frac{\pi^m}{m!}$ *ve* $|S^{2m+1}| = \frac{2(2\pi)^m}{1.3.5...(2m+1)}$ *elde edilir. Ayrıca,* $|S^{n-1}| = n\,|S^n|$ *ifadesi* $S^{n-1} = S(0,1)$ *in standart yüzey alanıdır.*

İspat. Fubini teoreminden,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x_1^2+x_2^2\right)} dx_1 dx_2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2} = \pi,
\end{aligned}
$$

olduğu için

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx \\
&= \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_k^2} dx_k \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^n \\
&= \pi^{n/2}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Diğer taraftan (4) den

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr dx' \\
&= \int_{S^{n-1}} dx' \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\frac{n}{2}-1} d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left|S^{n-1}\right| \Gamma\left(n/2\right),
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca, $\Gamma(1+\omega)=\omega\Gamma(\omega)$ olduğundan

$$\begin{aligned}|S^n| &= \int\limits_{|x|\leq 1} dx = \int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_0^1 r^{n-1}dr dx' = \frac{1}{n}\left|S^{n-1}\right| \\ &= \frac{1}{n}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\end{aligned}$$

bulunur. Burada dikkat edilmelidir ki herhangi bir $x\in\mathbb{R}^n$ ve $\rho>0$ için ρ yarıçaplı ve x merkezli yuvarın alanı $\rho^{n-1}|S^{n-1}|$ ve hacmi de $\rho^n|S^n| = \rho^n\frac{1}{n}|S^{n-1}|$ dir. Bildiğimiz üzere, tek değişkenli integral için

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{|x|^\alpha} = \begin{cases}\text{yakınsak, } \alpha<1 \text{ iken}\\ \text{ıraksak, } \alpha\geq 1 \text{ iken}\end{cases}$$

ve

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{|x|^\alpha} = \begin{cases}\text{yakınsak, } \alpha>1 \text{ iken}\\ \text{ıraksak, } \alpha\leq 1 \text{ iken}\end{cases}.$$

dir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ deki duruma bakalım. Bu bağlamda,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

ifadesi x in normunu göstersin.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{|x|^\alpha},\ \alpha>0$$

integralini inceleyelim.

Yukarıdaki integralde integrant 0 ve ∞ da sorun yaşayabilir, yani bu integral $x=0$ ve $x=\infty$ da singüleritiye sahiptir. Dolayısıyla, bu integrali iki paraçaya bölersek

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{|x|^\alpha} &= \int\limits_{|x|\leq 1}\frac{dx}{|x|^\alpha} + \int\limits_{|x|>1}\frac{dx}{|x|^\alpha} \\ &= F_1+F_2\end{aligned}$$

olur, burada $r = |x|$, hacim dx elemanı "kutupsal koordinatlarda" $dx = r^{n-1}drd\sigma$ şeklinde yazılabilir ve $d\sigma$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ birim küre üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Önce F_1 i tahmin edelim.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr d\sigma \\
&= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-n+1}} dr \\
&= \left|S^{n-1}\right| \begin{cases} \alpha - n + 1 < 1, \alpha < n \text{ için yakınsak} \\ \alpha - n + 1 \geq 1,\ \alpha \geq n \text{ için ıraksak} \end{cases} \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr \\
&= \frac{\left|S^{n-1}\right|}{n-\alpha},\ n - \alpha > 0 \text{ iken}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de F_2 nin durumuna bakalım.

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{S^{n-1}} \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr d\sigma \\
&= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-n+1}} dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|S^{n-1}\right| \begin{cases} \alpha - n + 1 > 1, \ \alpha > n \text{ için yakınsak} \\ \alpha - n + 1 \leq 1, \ \alpha \leq n \text{ için ıraksak} \end{cases} \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr \\
&= \frac{\left|S^{n-1}\right|}{\alpha - n}, \ \alpha - n > 0 \text{ iken}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Ayrıca, $\alpha = n$ ise $F_1 = F_2 = \infty$ olur.

Son olarak, $n = 3$ için kürenin hacmini bulalım. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
\left|S^3\right| &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

elde edilir ve benzer şekilde birim kürenin yüzey alanı da

$$
\left|S^2\right| = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} = 4\pi
$$

şeklinde bulunur, burada

$$
\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)
$$

ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir. ■

ÖRNEKLER

Örnek 0.17 *$f(x) = |x| \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ dir.*

İspat. Her $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^p \, dx \right)^{1/p} &= \left(\int\limits_{|x| \leq 1} |x|^p \, dx + \int\limits_{|x|>1} |x|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/p} \left(\int\limits_0^1 r^{n-1} r^p dr + \int\limits_1^\infty r^{n-1} r^p dr \right)^{1/p} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/p} \left(\int\limits_0^1 r^{n+p-1} dr + \int\limits_1^\infty r^{n+p-1} dr \right)^{1/p} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/p} \left[\frac{1}{n+p} + \lim_{t \to \infty} \left(\frac{r^{n+p}}{n+p} \Big|_1^t \right) \right]^{1/p} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/p} \left[\frac{1}{n+p} + \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{n+p}}{n+p} - \frac{1}{p+q} \right) \right]^{1/p} \\
&= \infty, \ n+p > 0 \text{ olduğundan}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $f(x) = |x| \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Örnek 0.18 *Her $pq + n > 0$ için $f(x) = |x|^p \chi_{B(0,1)}(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ dir.*

İspat. Her $pq + n > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{pq} \chi_{B(0,1)}(x) \, dx \right)^{1/q} &= \left(\int\limits_{|x| \leq 1} |x|^{pq} \, dx \right)^{1/q} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/q} \left(\int\limits_0^1 r^{n-1} r^{pq} dr \right)^{1/q} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/q} \left(\int\limits_0^1 r^{n+pq-1} dr \right)^{1/q} \\
&= \left| S^{n-1} \right|^{1/q} \left[\frac{1}{n+pq} \right]^{1/q} < \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $f(x) = |x|^p \chi_{B(0,1)}(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Örnek 0.19 *Her $pq + n < 0$ için $f(x) = |x|^p \chi_{B^C(0,1)}(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ dir.*

İspat. Her $pq+n<0$ için

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{pq}\chi_{B(0,1)}(x)\,dx\right)^{1/q} &= \left(\int\limits_{|x|>1}|x|^{pq}\,dx\right)^{1/q}\\
&= \left|S^{n-1}\right|^{1/q}\left(\int\limits_{1}^{\infty}r^{n-1}r^{pq}dr\right)^{1/q}\\
&= \left|S^{n-1}\right|^{1/q}\left(\int\limits_{1}^{\infty}r^{n+pq-1}dr\right)^{1/q}\\
&= \left|S^{n-1}\right|^{1/q}\left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{r^{n+pq}}{n+pq}\,\Big|_1^t\right)\right]^{1/q}\\
&= \left|S^{n-1}\right|^{1/q}\left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{n+pq}}{n+pq}-\frac{1}{n+pq}\right)\right]^{1/q}\\
&= \left|S^{n-1}\right|^{1/q}\left(\frac{1}{n+pq}\right)^{1/q}<\infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $f(x)=|x|^p\chi_{B^C(0,1)}(x)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Tanım 0.21 ***(Zayıf Lebesgue Uzayı ($L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$))*** *$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\left|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}\right|^{1/p}\le C<\infty$$

olacak şekilde $C>0$ sabiti varsa f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de zayıf L^p uzayına aittir denir. Diğer bir ifadeyle, zayıf $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)=\{f:\|f\|_{L^{p,\infty}}<\infty\}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{\lambda>0}\lambda\left|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}\right|^{1/p}$$

f nin zayıf L^p de yarı normunu ifade eder. Ayrıca, $1\le p<\infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)\subset$

$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *sağlanır. Acaba her* $p \geq 1$ *için* $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$*? Gerçekten,*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\right|^{1/p} \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} dx \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} \lambda^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

dir. Yani $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *elde edilir.*

ÖRNEKLER

Örnek 0.20 $\mathbb{R}^n$ *de* $f(x) = |x|^{-n/p}$ *fonksiyonu verilsin.* $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ *fakat* $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *dir.*

İspat. Her $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} dx = \int\limits_{|x|\leq 1} |x|^{-n} dx + \int\limits_{|x|>1} |x|^{-n} dx \\
&= \left|S^{n-1}\right| \left(\int_0^1 r^{-n} r^{n-1} dr + \int_1^\infty r^{-n} r^{n-1} dr \right) \\
&= \left|S^{n-1}\right| \left(\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dr}{r} + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dr}{r} \right) \\
&= \left|S^{n-1}\right| \left[\lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\ln r \,\big|_\epsilon^1 \right) + \lim_{t\to\infty} \left(\ln r \,\big|_1^t \right) \right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Şimdi de her $p \geq 1$ için $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}}^p &= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-n/p} > \lambda\right\}\right| \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}^n : |x|^{-n/p}>\lambda\right\}} dx \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \int\limits_{|x|<\lambda^{-p/n}} dx \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|S^{n-1}\right| \left(\int\limits_0^{\lambda^{-p/n}} r^{n-1} dr\right) \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|S^{n-1}\right| \left(\frac{r^n}{n} \Big|_0^{\lambda^{-p/n}}\right) \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|S^{n-1}\right| \frac{\lambda^{-p}}{n} \\
&= \sup_{\lambda>0} \frac{\left|S^{n-1}\right|}{n} = |S^n| = |B(0,1)| < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Örnek 0.21 $\mathbb{R}$ *de* $f(x) = \frac{1}{|x|}$ *fonksiyonu verilsin.* $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *fakat* $f \notin L(\mathbb{R})$ *dir.*

İspat. $p = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{1,\infty}} &= \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > \lambda\right\}\right| \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda \int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{1}{|x|}>\lambda\right\}} dx \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda \int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R} : |x|<\frac{1}{\lambda}\right\}} dx \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda \int\limits_{-1/\lambda}^{1/\lambda} dx = 2 < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ dir. Fakat, $\frac{1}{|x|} \notin L(\mathbb{R})$ dir. Gerçekten de

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|x|} = \int\limits_{-\infty}^{0} -\frac{1}{x}dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \infty$$

dur. ■

Tanım 0.22 ***(Örtü)*** *Birleşimleri A kümesini kapsayan U_i kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu U_i kümelerinin her biri açıksa bu halde U_i, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir.*

Tanım 0.23 ***(Kompakt)*** *X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine "kompakttır" denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır.*

Tanım 0.24 ***(Lokal integrallenebilme)*** *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde $\int\limits_K |f(x)|\,dx < \infty$ ise f lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.*

$$L_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int\limits_K |f(x)|\,dx < \infty;\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \ kompakt \right\}$$

yazılır. Benzer şekilde, her $p \geq 1$ için

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \left(\int\limits_K |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} < \infty;\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \ kompakt \right\}$$

ile gösterilir.

Uyarı 0.1 *$L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının arakesiti boş değildir. Yani, her $p, q > 1$ için $L^p \cap L^q \neq \emptyset$ dır. Örneğin,*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tüm L^p uzaylarının elemanıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx &= \int_{|x|\leq 1} |f(x)|^p\, dx \\
&= 2\int_0^1 |x|^p\, dx \\
&= \frac{2}{p+1} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $f \in L^p(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx &= \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^p r^{n-1} dr dx' \\
&= \int_{S^{n-1}} \left(\frac{r^{n+p}}{n+p} \Big|_0^1 \right) dx' \\
&= \frac{|S^{n-1}|}{n+p} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir. Fakat bu uzayların hiçbir çifti arasında gömme özelliği yoktur, yani birbirini içermezler. Ancak bu uzayların hepsini içeren $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı vardır. Şimdi bu durumla ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 0.1 *Her $p \geq 1$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kapsaması geçerlidir.*

İspat. Keyfi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alalım. Acaba her kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde $\int_K |f(x)|\, dx < \infty$?

Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\int_K |f(x)|\, dx \\
\leq &\left(\int_K |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_K 1^{p'} dx \right)^{1/p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_K |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} |K|^{1/p'}, \ K \text{ kompakt olduğundan } |K|^{1/p'} < \infty \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} |K|^{1/p'}, \ K \subset \mathbb{R}^n \text{ olduğundan} \\
&\leq |K|^{1/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dir. Sonuç olarak, her $p \geq 1$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kapsaması geçerlidir. Ayrıca, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Örneğin, $E = (0,1) \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu verilsin. $f \notin L(E)$ fakat $f \in L_{loc}(E)$ dir. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
\int_E |f(x)| \, dx &= \int_0^1 \left| \frac{1}{x} \right| dx \\
&= (\ln|x|) \, |_0^1 = \infty
\end{aligned}
$$

olduğundan $f \notin L(E)$ dir. Şimdi $E = (0,1)$ bölgesinde $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ olacak şekilde bir $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \subset (0,1)$ alt aralığını alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} |f(x)| \, dx &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{x} \right| dx \\
&= (\ln|x|) \, |_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \ln \frac{3}{2} < \infty
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, $f \in L_{loc}(E)$ dir.

Tanım 0.25 *T, reel-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayından kompleks değerli, hemen her yerde sonlu, ölçülebilir fonksiyonların bir (Y, υ) ölçü uzayına tanımlanan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için*

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \ \text{ ve } T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

ise T operatörüne lineer operatör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \ \text{ ve } \ |T(\lambda f)| = |\lambda| \, |T(f)|$$

ise T *operatörüne altlineer operatör, bir* $C > 0$ *sabiti için*

$$|T(f+g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|) \;\; ve \;\; |T(\lambda f)| = |\lambda| \, |T(f)|$$

ise T *operatörüne quasilineer operatör denir. Altlineerlik quasilineerliğin özel bir durumudur.*

Tanım 0.26 ***(Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi)*** *Eğer* $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *ise bu durumda hemen her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$

sağlanır.

$\cdot$ $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Bu durumda* Mf *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu*

$$M(f)(x) = \sup_{x \in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy$$

ile tanımlanır. Dikkat edilirse M *maksimal operatörü altlineerdir. Yani, her* $f, g \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$\begin{aligned} M(f+g)(x) &= \sup_{x \in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f+g|(y)\, dy \\ &\leq \sup_{x \in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} (|f| + |g|)(y)\, dy \\ &\leq \sup_{x \in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f|(y)\, dy \\ &\quad + \sup_{x \in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |g|(y)\, dy \\ &= M(f)(x) + M(g)(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M(\lambda f)(x) &= \sup_{x\in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |\lambda f|(y)\,dy \\ &= \sup_{x\in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |\lambda|\,|f|(y)\,dy \\ &= |\lambda| \sup_{x\in Q(x,r)} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f|(y)\,dy \\ &= |\lambda|\, M(f)(x) \qquad (6) \end{aligned}$$

koşulları sağlanır. (6) de $\lambda \geq 0$ *olarak alırsak,*

$$M(\lambda f)(x) = \lambda M(f)(x)$$

elde edilir ki bu durumda M *maksimal operatörü homojen olur.*

·

$$|f(x)| \leq C \Longrightarrow M(f)(x) \leq \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} C dy \leq \sup_{r>0} C = C$$

dir.

· M *maksimal operatörü monotondur. Yani,*

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Longrightarrow M(f)(x) \leq M(g)(x)$$

dir.

· $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ *ise, bu durumda hemen her yerde* $M(f)(x) < \infty$ *dur. Gerçekten,* $f \in L^p$ *olduğundan Tanım 0.26 dan hemen her yerde tüm* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $r \to 0$ *iken*

$$F_r = \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} f(y)\,dy \to |f(x)|$$

yazabiliriz. Bundan dolayı, F_r, $r < r_0$ *için sınırlıdır. Hölder eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} f(y)\,dy \\ \Longrightarrow |F_r| &\leq \frac{1}{|Q(x,r)|^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)}}\left(\int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{Q(x,r)} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|f\|_{L^p}\frac{1}{|Q(x,r)|^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)}}|Q(x,r)|^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{\|f\|_{L^p}}{|Q(x,r)|^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $r \to \infty$ *iken sıfıra gider. Böylece,* I_r, $r \geq r_0$ *için sınırlıdır ve bu da istediğimiz sonuçtur.*

· M *maksimal operatörü bir pozitif operatördür. Tüm* $x \in \mathbb{R}^n$ *ve* $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *için* $M(f)(x) \geq 0$ *dır.*

· M *maksimal operatörü sınırlı fonksiyonları sınırlı fonksiyonlara dönüştürür ve*

$$\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

olarak ifade edilir. Yani, M *maksimal operatörü* 1 *e eşit ya da* 1 *den küçük sabit ile* $(-\infty,\infty)$ *tipindedir.*

· $f \in L(\mathbb{R}^n)$ *olması* $Mf \in L(\mathbb{R}^n)$ *olmasıyla aynı değildir. Öncelikle,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun karekteristik fonksiyonu* $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ *olsun. Bu durumda,* Mf *maksimal fonksiyonu*

$$M(f)(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{|x-b|} & , \quad x \leq a \\ 1 & , \quad x \in (a,b) \\ \frac{b-a}{|x-a|} & , \quad x \geq b \end{cases}$$

dir. Örnek olarak, $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ *fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} M(f)(x) &= \sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int\limits_{x}^{x+r} |f(y)|\,dy \\ &\geq \frac{1}{2x}\int\limits_{0}^{2x} \chi_{(0,1)}(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2x} \qquad \left[M(f)(x) \notin L(\mathbb{R}^n) \text{ ve } x > \frac{1}{2} \text{ için}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, M $(1,1)$ tipinde bir operatör değildir.

Ayrıca, $0 < p < \infty$ için

$$M_p(f) = (M(f^p))^{1/p}$$

olduğunu yazabiliriz.

Tanım 0.27 ***(Ağırlıklı Lebesgue Uzayı)*** *$1 \le p < \infty$ olmak üzere $w(x) \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ağırlık fonksiyonu verilsin. Ağırlıklı Lebesgue uzayı $1 \le p < \infty$ olmak üzere,*

$$L^p(w) \equiv L^p(\mathbb{R}^n, w) = \left\{ f : \|f\|_{L^{p,w}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

normuna sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesidir ve $L^p(w) \equiv L^p(\mathbb{R}^n, w)$ ile gösterilir. Bundan böyle, A_p gösterimini Muckenhoupt sınıfı olarak adlandıracağız. $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi B yuvarı için

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} < \infty$$

ise $w(x) \in A_p(\mathbb{R}^n)$ dir denir (daha fazla bilgi için bakınız: [9]).

$p = 1$ iken herhangi B yuvarı için

$$\frac{1}{|B|} \int_B w(x)dx \le C \operatorname*{essinf}_{x \in B} w(x)$$

ise $w(x) \in A_1(\mathbb{R}^n)$ dir denir. Yani

$$A_1 = \{0 < w \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : M(w)(x) \le Cw(x)\,,\ h.h.y.\}$$

dir. Bazı $1 \le p < \infty$ için w ağırlık fonksiyonu A_p koşulunu sağlıyorsa $w \in A_\infty$ dur denir.

Açıkçası, klasik Hölder eşitsizliğinden $1 \le p \le q < \infty$ için $A_p \subset A_q \subset A_\infty$ sağlanır. Ayrıca, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $w \in A_p$ ise bu durumda $w^{1-p'} \in A_{p'}$ dir.

Tanım 0.28 *(BMO* ***(Bounded Mean Oscillation)*** *)* ***Uzayı)***

$f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonu ve bir* $Q(x,r)$ *küpü için*

$$f_{Q(x,r)} = \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} f(y)\, dy$$

ifadesine f *fonksiyonunun* $Q(x,r)$ *üzerindeki ortalaması denir. Bu durumda* $\left| f - f_{Q(x,r)} \right|$ *fonksiyonuna* f *fonksiyonunun salınımı ve*

$$\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} \left| f(y) - f_{Q(x,r)} \right| dy$$

ifadesine $Q(x,r)$ *üzerinde* f *fonksiyonunun ortalama salınımı denir.*

$f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f(y) - f_Q|\, dy$$

olsun. Eğer $\|f\|_* < \infty$ *ise* f *fonksiyonu ortalama salınıma sahiptir denir ve* $\|f\|_* < \infty$ *olmak üzere* $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonlarının kümesi*

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_* < \infty \}$$

ile gösterilir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ *bir lineer uzaydır. Bundan başka* f, $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *ve* λ *skaler olmak üzere*

$$\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

$$\|\lambda f\|_* = |\lambda|\, \|f\|_*$$

sağlanır. Fakat $\|\cdot\|_*$ *bir norm değildir. Çünkü* $\|f\|_* = 0$ *olması* $f = 0$ *olmasını gerektirmeyip* f *nin sabit olmasını gerektirmektedir. Bundan başka her* c *sabit fonksiyonu için* $\|c\|_* = 0$ *sağlanır.* $\|\cdot\|_*$ *bir yarı-norm olmasına rağmen karışıklığın söz konusu olmadığı durumlarda bir norm olarak adlandırılır.* c *bir sabit iken* f *ve* $f + c$ *fonksiyonları aynı* BMO *normuna sahip olup, farkları bir sabit olan* BMO *uzayının elemanları özdeştir.*
Ayrıca, BMO *uzayı* L^∞ *uzayına biraz benzer, fakat* L^∞ *uzayı* BMO *uzayının*

bir alt uzayıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} |f(y)-f_{Q(x,r)}|dy \\
\leq\; & \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|\,dy+\frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} \left|f_{Q(x,r)}\right|dy \\
=\; & \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|\,dy+\left|f_{Q(x,r)}\right| \\
\leq\; & 2\frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|\,dy \leq 2\,\|f\|_{L^\infty}\,.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\|f\|_* \leq 2\,\|f\|_{L^\infty}$ *olduğu için* $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ *kapsaması geçerlidir. Bu kapsamadan Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon* BMO *uzayındadır. Fakat, sınırlı olmayan* BMO *fonksiyonları da vardır.* $BMO\,(\mathbb{R}^n)$ *uzayına ait olan fakat* $L_\infty\,(\mathbb{R}^n)$ *uzayına ait olmayan tipik bir örnek* $\log|x|$ *fonksiyonudur.*

$f \in L_{loc}\,(\mathbb{R}^n)$ için f nin $M^\# f\,(x)$ sharp maksimal fonksiyonu

$$M^\# f\,(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |f\,(y)-f_Q|\,dy$$

ile tanımlanır, burada supremum x noktasını içeren bütün Q küpleri üzerinden alınmaktadır. BMO uzayının tanımından, $f \in L_{loc}\,(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $f \in BMO\,(\mathbb{R}^n) \iff M^\# f\,(x) \in L^\infty$ veya $\|f\|_* = \left\|M^\# f\right\|_{L^\infty}$ yazılabilir. Ayrıca, $f \in BMO\,(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_* = \left\|M^\# f\right\|_{L^\infty} = \sup_{x\in Q}\inf_{c\in\mathbb{R}}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |f\,(x)-c|\,dx$$

sağlanır (bakınız:[7]).

Şimdi de genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayının tanımını verelim.

Tanım 0.29 *w, $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan bir ağırlık fonksiyonu, f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde yerel olarak integrallenebilir bir fonksiyon, $\varphi \in \Delta_2$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L^{p,\varphi}(w) \equiv L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$ genelleştirlmiş ağırlıklı Morrey uzayı*

$$L^{p,\varphi}(w) := \left\{f \in L^{p,w}_{loc}\,(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{p,\varphi}(w)} < \infty\right\}$$

biçiminde tanımlanır ve $\|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}$

$$\|f\|_{L^{p,\varphi}(w)} \equiv \|f\|_{L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, w(y)\, dy \right)^{1/p} < \infty$$

ile verilir, burada, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ *kümesi merkezi* x *ve yarıçap uzunluğu* r *olan açık yuvarı gösterir.*

Yukarıdaki tanımdan,

· $\varphi(r) = r^{\lambda}$ ve $0 < \lambda < n$ seçilmesiyle $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n, w)$ klasik ağırlıklı Morrey uzayı elde edilir (bakınız: [9]).

· $\varphi(r) = r^{\lambda}$, $0 < \lambda < n$ ve $w = 1$ seçilmesiyle $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı elde edilir (bakınız: [11, 19]).

· $\varphi(r) = 1$ seçilmesiyle $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p}(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıkkı Lebesgue uzayı elde edilir (bakınız: [9]).

Bu makalede, tanımları aşağıda verilen bazı integral operatörlerle ilgili bazı multilineer operatörleri inceleyeceğiz.

$\Gamma(x) = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_{+} : |x-y| < t\right\}$ olsun ve $\chi_{\Gamma(x)}$, $\Gamma(x)$ in karakteristik fonksiyonunu belirtsin. m_j $(j = 1, \ldots, l)$ lerin pozitif tam sayılar olduğunu varsayalım. $m_1 + \cdots + m_l = m$, A_j $(j = 1, \ldots, l)$ ler, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki fonksiyonlar ve

$$R_{m_j+1}(A_j; x, y) = A_j(x) - \sum_{|\alpha| < m_j} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} A_j(y)\,(x-y)^{\alpha}$$

olsun. Burada $R_{m_j+1}(A_j; x, y)$ ler, A_j lerin m_j-inci merteben Taylor kalan serileridir. Ayrıca her α_i $(i = 1, \cdots, n)$ negatif olmayan tam sayı olmak üzere, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ için $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ve $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$ özellikleri mevcuttur.

Tanım 0.30 $\epsilon > 0$ *ve* ψ *aşağıdaki özellikleri sağlayan sabit bir fonksiyon olsun:*

(1) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 0,$

(2) $|\psi(x)| \le C(1 + |x|)^{-(n+1)}$,

(3) $2|y| < |x|$ *için* $\psi(x+y) - \psi(x) \le C|y|^{\epsilon}(1+|x|)^{-(n+1+\epsilon)}$,

burada $C > 0$ sayısı x den bağımsızdır. Bu durumda, multilineer Littlewood-Paley operatörü

$$S_{\psi}^{A}(f)(x) = \left[\iint\limits_{\Gamma(x)} \left[F_t^A(f)(x,y)\right]^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_t^A(f)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{l} R_{m_j+1}(A_j;x,z)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f(z)\,dz$$

biçimindedir ve $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ dir.

$F_t(f)(y) = f * \psi_t(y)$ *olsun. Bu durumda,* $A = 1$ *için* $S_{\psi}^{A}(f)$ *operatörü*

$$S_{\psi}(f)(x) = \left[\iint\limits_{\Gamma(x)} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2}$$

şeklinde klasik Littlewood-Paley operatörüne dönüşür (bakınız:[25]).

H Hilbert uzayını

$$H_{n+1} = \left\{ h : \|h\| = \left[\iint\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |h(y,t)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2} \right\}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, her bir sabitlenmiş $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t^A(f)(x,y)$, $(0,\infty)$ dan H uzayına bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve

$$S_{\psi}^{A}(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) \right\|,$$

$$S_{\psi}(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t(f)(y) \right\|$$

oldukları da açıktır.

Marcinkiewicz integral operatörü ilk olarak Marcinkiewicz [15] tarafından

$$\mu(f)(x) = \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{|F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^2}{t^3} dt \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

biçiminde tanımlanmıştır, burada $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ *biçiminde tanımlıdır. 1944 de Zygmund [26]*

$$\|\mu(f)\|_{L_p} \le C\,\|f\|_{L_p}, \qquad 1 < p < \infty$$

eşitsizliğini ispatladı. Yukarıdaki $\mu(f)$ *integrali,* F *nin Marcinkiewicz integrali olarak adlandırılır ve* f *nin Hilbert dönüşümüyle oldukça doğal bir şekilde ilişkilidir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\frac{dt}{t} &= -\int\limits_0^{\infty} [f(x+t) - f(x-t)]\,\frac{dt}{t} \\
&= -\int\limits_0^{\infty} \frac{d}{dt}[F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)]\,\frac{dt}{t} \\
&= -\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)}{t}\right)\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

dir. Bu ilişki Stein [22]' in Marcinkiewicz integralinin n (yüksek) boyutlu bir versiyonunu tanımlamasına yol açtı.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\mathbb{R}^n$ *de* $d\sigma$ *Lebesgue ölçüsü ile donatılmış birim küre olmak üzere,* Ω *nın aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:*

(a) Ω, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *üzerinde sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon, yani herhangi bir* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *için*

$$\Omega(tx) = \Omega(x)$$

olsun.

(b) Ω, S^{n-1} *üzerinde sıfır ortalama değerine sahip, yani*

$$\int\limits_{S^{n-1}} \Omega(x')\,d\sigma(x') = 0, \qquad x' = \frac{x}{|x|}$$

olsun.

(c) $\Omega \in Lip_\gamma(S^{n-1})$, $0 < \gamma \le 1$, *yani herhangi bir* x' *ve* $y' \in S^{n-1}$ *için*

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \le C|x' - y'|^\gamma$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\frac{\Omega(z')}{|x-z|^n}dz &= \upsilon_n \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(x-tz')\,\Omega(z')\,d\sigma(z')\,\frac{dt}{t} \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(F_t(x)\right)\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{F_t(x)}{t}\right)\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

singüler integralini elde ederiz. Burada,

$$F_t(x) = \int_{|z|<t} f(x-z)\frac{\Omega(z)}{|z|^{n-1}}dz$$

biçimindedir. Buradan, 1 boyutlu duruma benzer şekilde 1958 de Stein [22], μ_Ω yüksek (n) boyutlu Marcinkiewicz integralini

$$\begin{aligned}\mu_\Omega(f)(x) &= \left(\int_0^\infty \frac{|F_t(x)|^2}{t^3}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olarak tanımladı ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise, o zaman

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L^p} \le C\,\|f\|_{L^p}, \qquad 1 < p < 2, \tag{7}$$

eşitsizliğini ve $p = 1$ olduğu zaman ise

$$|\{\mu_\Omega(f) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_L, \qquad \text{tüm } \lambda > 0$$

eşitsizliğini ispatladı. Onun sonuçları daha sonra Hörmander [13] tarafından makalesinde geliştirildi. Nitekim, Hörmander [13], makalesinde Ω nın Hölder sürekliliğinin daha zayıf bir durumla değiştirilebileceğini gösterdi, yani, Ω nın S^{n-1} üzerinde $w(\delta)$ süreklilik modülü

$$\int_0^1 \frac{w(\delta)}{\delta} d\delta < +\infty$$

Dini şartını sağlar ve μ_Ω

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty \frac{|\mathcal{F}(x,t)|^2}{t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır, burada

$$\mathcal{F}(x,t) = t^{-\beta} \int_{|z|<t} f(x-z) \frac{\Omega(z')}{|z|^{n-\beta}} dz, \qquad \beta > 0,$$

biçimindedir.

Benedek vd. [2], Ω, $x \neq 0$ da sürekli diferensiyellenebilir olduğunda ($\Omega \in C^1(S^{n-1})$) yukarıdaki (7) durumunun $1 < p < \infty$ için sağlandığını göstermişlerdir. Bu durumda, multilineer Marcinkiewicz operatörü

$$\mu_\Omega^A(f)(x) = \left[\iint_{\Gamma(x)} \left[F_t^A(f)(x,y) \right]^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right]^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_t^A(f)(x,y) = \int_{|y-z|\le t} \frac{\prod_{j=1}^{l} R_{m_j+1}(A_j;x,z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z)\, dz$$

biçimindedir. Ayrıca, $A = 1$ için $\mu_\Omega^A(f)$ operatörü

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left[\iint_{\Gamma(x)} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right]^{1/2}$$

şeklinde klasik Marcinkiewicz operatörüne dönüşür, burada

$$F_t(f)(y) = \int_{|y-z|\le t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z)\, dz$$

biçimindedir (bakınız:[10]).

H Hilbert uzayını

$$H_{n+3} = \left\{ h : \|h\| = \left[\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}} |h(y,t)|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right]^{1/2} \right\}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, her bir sabitlenmiş $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t^A(f)(x,y)$, $(0,\infty)$ dan H uzayına bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve

$$\mu_\Omega^A(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) \right\|,$$
$$\mu_\Omega(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t(f)(y) \right\|$$

oldukları da açıktır.

$m = 0$ olduğu zaman, S_ψ^A ve μ_Ω^A operatörleri sadece multilineer komütatörlerdir. $m > 0$ olduğu zaman ise S_ψ^A ve μ_Ω^A operatörleri komütatörlerin aşikar olmayan genelleştirmeleridir (bakınız:[10]).

Kısım III

YARDIMCI LEMMALAR VE ANA LEMMA

Bu bölümde ana sonucu ve ispatını vermeden önce aşağıdaki lemmaları vereceğiz. Bu lemmalar ana sonucun ispatı için çok gereklidir.

Lemma 0.2 *[5] A, $\mathbb{R}^n$ de bir fonksiyon, $|\alpha| = m$ ve $q > n$ için $D^\alpha A \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda*

$$|R_m(A;x,y)| \le C\,|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{\left|\tilde{Q}(x,y)\right|} \int_{\tilde{Q}(x,y)} |D^\alpha A(z)|^q \, dz \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\tilde{Q}(x,y)$, x merkezli ve kenar uzunluğu $5\sqrt{n}\,|x-y|$ olan bir küptür.

Lemma 0.3 *$1 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$ ve $w \in A_1$ olsun. Bu durumda, $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$ için*

a.

$$\|M(f)\|_{L^{p,\varphi}(w)} \le C \left\|M^{\#} f\right\|_{L^{p,\varphi}(w)};$$

b. $1 < q < p$ için

$$\|M_q(f)\|_{L^{p,\varphi}(w)} \le C \|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (a)' nın ispatı için, $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$ olsun. $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $M(w\chi_B) \in A_1$ ve herhangi bir $w \in A_1$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(y)|^p \, w(y)\, dy \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left|M^{\#} f(y)\right|^p w(y)\, dy$$

olduğu [4] de ispatlanmıştır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(y)|^p \, w(y)\, dy &\le \int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(y)|^p \, M(w\chi_B)(y)\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left|M^{\#} f(y)\right|^p M(w\chi_B)(y)\, dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left[\begin{array}{c} \int\limits_{B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} M(w\chi_B)(y)\,dy \\ +\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B\setminus 2^{k}B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} M(w\chi_B)(y)\,dy \end{array}\right] \\
&\le C\left[\begin{array}{c} \int\limits_{B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} w(y)\,dy \\ +\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B\setminus 2^{k}B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} \frac{w(B)}{\left|2^{k+1}B\right|}dy \end{array}\right] \\
&\le C\left[\begin{array}{c} \int\limits_{B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} w(y)\,dy \\ +\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} \frac{M(w)(y)}{2^{n(k+1)}}dy \end{array}\right] \\
&\le C\left[\begin{array}{c} \int\limits_{B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} w(y)\,dy \\ +\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B} \left|M^{\#}f(y)\right|^{p} \frac{w(y)}{2^{nk}}dy \end{array}\right] \\
&\le C\left\|M^{\#}f\right\|_{L^{p,\varphi}(w)}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk}\varphi\left(2^{k+1}r\right) \\
&\le C\left\|M^{\#}f\right\|_{L^{p,\varphi}(w)}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-n}D\right)^{k}\varphi(r) \\
&\le C\left\|M^{\#}f\right\|_{L^{p,\varphi}(w)}^{p} \varphi(r)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayının tanımından,

$$\|M(f)\|_{L^{p,\varphi}(w)} \le C\left\|M^{\#}f\right\|_{L^{p,\varphi}(w)}$$

elde ederiz.

(a)'nın ispatında olduğu gibi benzer bir argüman (b)'nin ispatını da verecektir, dolayısıyla (b)'nin ispatını geçiyoruz. ∎

Lemma 0.4 *$1 < p < \infty$ ve $w \in A_1$ olsun. Bu durumda, S_ψ ve μ_Ω operatörleri $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ üzerinde sınırlıdır.*

İspat. S_ψ için, Minkowski eşitsizliği ve Tanım 0.30 deki (2) şartından,

$$\begin{aligned}
S_\psi(f)(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_{\Gamma(x)} |\psi_t(y-z)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_0^\infty \int_{|x-y|\leq t} \frac{t^{-2n+2\delta}}{\left(1+\frac{|y-z|}{t}\right)^{2n+2}} \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} dz \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_0^\infty \int_{|x-y|\leq t} \frac{2^{2n+2} t^{1-n}}{(2t+|y-z|)^{2n+2}} dydt \right)^{1/2} dz
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $|x-y| \leq t$ olması $2t+|y-z| \geq 2t+|x-z|-|x-y| \geq t+|x-z|$ olmasını gerektirir. Buradan ve

$$\int_0^\infty \frac{t}{(t+|x-z|)^{2n+2}} dt = \frac{C}{|x-z|^{2n}}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
S_\psi(f)(x) &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_0^\infty \frac{t}{(t+|x-z|)^{2n+2}} dt \right)^{1/2} dz \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{|x-z|^n} dz
\end{aligned}$$

elde ederiz.

μ_Ω için ise $|x-y| \leq t$ ve $|y-z| \leq t$ olması $|x-z| \leq 2t$ ve $|y-z| \geq$

$|x-z|-t \geq |x-z|-3t$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\begin{aligned}
\mu_\Omega(f)(x) &\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\int\limits_{|x-y|\leq t}\left[\frac{|\Omega(y-z)|}{|y-z|^{n-1}}|f(z)|\right]^2\chi_{\Gamma(z)}(y,t)\frac{dydt}{t^{n+3}}\right]^{1/2}dz \\
&\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\left[\int\int\limits_{|x-y|\leq t}\frac{\chi_{\Gamma(z)}(y,t)\,t^{-n-3}}{(|x-z|-3t)^{2n-2}}dydt\right]^{1/2}dz \\
&\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^{\frac{3}{2}}}\left[\int\limits_{\frac{|x-z|}{2}}^{\infty}\frac{1}{(|x-z|-3t)^{2n-2}}dt\right]^{1/2}dz \\
&\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece Lemma 0.3, [3] den elde edilir. ■

Lemma 0.5 ***(Ana Lemma)*** *$|\alpha| = m_j$ ve $j = 1,\ldots,l$ olmak üzere tüm α için $D^\alpha A_j \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\begin{aligned}
\left(S_\psi^A(f)\right)^{\#}(x) &\leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\|D^{\alpha_j}A_j\|_*\right)M_q(f)(x); \qquad (8)\\
\left(\mu_\Omega^A(f)\right)^{\#}(x) &\leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\|D^{\alpha_j}A_j\|_*\right)M_q(f)(x). \qquad (9)
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat. İlk önce (8) eşitsizliğini ispatlayacağız. Bunun için bazı C_0 sabiti, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}\left|S_\psi^A(f)(x)-C_0\right|dy \leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\|D^{\alpha_j}A_j\|_*\right)M_r(f)(\tilde{x})$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Genelliği kaybetmeden $l=2$ kabul edebiliriz. $Q=Q(x_0,r)$, x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan bir kübü göstersin ve $\tilde{x}\in Q$ olsun. Ayrıca, $\tilde{Q}=5\sqrt{n}Q$ ve $\tilde{A}_j(x)=A_j(x)-\sum\limits_{|\alpha|<m_j}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}}x^\alpha$ olsun. Bu durumda $R_{m_j}(A_j;x,y)=R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,y\right)$ ve $|\alpha|=m_j$ için $D^\alpha\tilde{A}_j=D^\alpha A_j-(D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}}$ bulunur. $f_1=f\chi_{\tilde{Q}}$ ve $f_2=f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\tilde{Q}}$ için

$$F_t^A(f)(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}R_{m_j+1}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f(z)\,dz$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}R_{m_j+1}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_1(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{\alpha_1!}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)\,\psi_t(y-z)f_1(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_2!}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m}D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\,\psi_t(y-z)f_1(z)\,dz$$

$$+\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)\,D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\,\psi_t(y-z)$$

$$\times f_1(z)\,dz$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\left|S_\psi^A(f)(x)-S_\psi^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)\right|$$

$$=\left|\left\|\chi_{\Gamma(x)}F_t^A(f)(x,y)\right\|-\left\|\chi_{\Gamma(x_0)}F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\|\right|$$

$$\le\left\|\chi_{\Gamma(x)}F_t^A(f)(x,y)-\chi_{\Gamma(x_0)}F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \chi_{\Gamma(x)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m} \psi_t\left(y-z\right) f_1\left(z\right) dz \right\| \\
&+ \left\| \chi_{\Gamma(x)} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1} \tilde{A}_1\left(z\right) \psi_t\left(y-z\right) f_1\left(z\right) dz \right\| \\
&+ \left\| \chi_{\Gamma(x)} \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_2} \tilde{A}_2\left(z\right) \psi_t\left(y-z\right) f_1\left(z\right) dz \right\| \\
&+ \left\| \begin{array}{c} \chi_{\Gamma(x)} \sum\limits_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1} \tilde{A}_1\left(z\right) D^{\alpha_2} \tilde{A}_2\left(z\right) \psi_t\left(y-z\right) f_1\left(z\right) dz \end{array} \right\| \\
&+ \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^{\tilde{A}}\left(f_2\right)\left(x,y\right) - \chi_{\Gamma(x_0)} F_t^{\tilde{A}}\left(f_2\right)\left(x_0,y\right) \right\| \\
&:= I_1\left(x\right) + I_2\left(x\right) + I_3\left(x\right) + I_4\left(x\right) + I_5\left(x\right)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} \left| S_\psi^A\left(f\right)\left(x\right) - S_\psi^{\tilde{A}}\left(f_2\right)\left(x_0\right) \right| dx \\
\leq \; & \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} I_1\left(x\right) dx \\
& + \frac{C}{|Q|} \int\limits_{Q} I_2\left(x\right) dx \\
& + \frac{C}{|Q|} \int\limits_{Q} I_3\left(x\right) dx \\
& + \frac{C}{|Q|} \int\limits_{Q} I_4\left(x\right) dx \\
& + \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} I_5\left(x\right) dx \\
: \; & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla, I_1, I_2, I_3, I_4 ve I_5 i tahmin edelim.

İlk olarak, $x \in Q$ ve $z \in \tilde{Q}$ için Lemma 0.2 den $R_{m_j}\left(\tilde{A}_j; x, z\right) \leq C\left|x-y\right|^{m_j} \sum\limits_{|\alpha_j|=m_j} \left\|D^{\alpha_j} A_j\right\|_*$ elde ederiz. Böylece, $1 < q < \infty$ için S_ψ nin L^q sınırlılığından

$$I_1 \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \left\|D^{\alpha_j} A_j\right\|_* \right) \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|S_\psi\left(f_1\right)(x)\right| dx$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \left\|D^{\alpha_j} A_j\right\|_* \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|S_\psi\left(f_1\right)(x)\right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \left\|D^{\alpha_j} A_j\right\|_* \right) |Q|^{-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_Q \left|f_1(x)\right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \left\|D^{\alpha_j} A_j\right\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})$$

elde edilir.

I_2 için, $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ için $q = pr$ olduğunu belirtirsek, Hölder eşitsizliğinden

$$I_2 \leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \left\|D^{\alpha_2} A_2\right\|_* \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|S_\psi\left(D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 f_1\right)(x)\right| dx$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \left\|D^{\alpha_2} A_2\right\|_* \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|S_\psi\left(D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 f_1\right)(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \left\|D^{\alpha_2} A_2\right\|_* \sum_{|\alpha_1|=m_1} |Q|^{-\frac{1}{r}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 f_1(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \left\|D^{\alpha_2} A_2\right\|_* \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{\tilde{Q}} \left|D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 f_1(x)\right|^{pr'} dx \right)^{\frac{1}{pr'}}$$

$$\times \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{\tilde{Q}} \left|f(x)\right|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{pr}}$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \left\|D^{\alpha} A_j\right\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})$$

elde ederiz.

I_3 için, I_2 nin ispatına benzer şekilde

$$I_3 \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} A_j\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})$$

elde ederiz.

Benzer şekilde, I_4 için, $1 < p < \infty$, $r_1, r_2, r_3 > 1$ ve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1$ için $q = pr$ olduğunu belirtirsek,

$$\begin{aligned}
I_4 \leq{}& C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} \left| S_{\psi}\left(D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 D^{\alpha_2} \tilde{A}_2 f_1 \right)(x) \right| dx \\
\leq{}& C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| S_{\psi}\left(D^{\alpha_1} \tilde{A}_1 D^{\alpha_2} \tilde{A}_2 f_1 \right)(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq{}& C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} |Q|^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| D^{\alpha_1} \tilde{A}_1(x) D^{\alpha_2} \tilde{A}_2(x) f_1(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq{}& C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} \left| D^{\alpha_1} \tilde{A}_1(x) \right|^{pr_1} dx \right)^{\frac{1}{pr_1}} \\
& \times \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} \left| D^{\alpha_2} \tilde{A}_2(x) \right|^{pr_2} dx \right)^{\frac{1}{pr_2}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{pr_3} dx \right)^{\frac{1}{pr_3}} \\
\leq{}& C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} A_j\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})
\end{aligned}$$

bulunur.

I_5 için,

$$\begin{aligned}
&\chi_{\Gamma(x)} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x,y) - \chi_{\Gamma(x_0)} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{\Gamma(x)} - \chi_{\Gamma(x_0)} \right) \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j; x, z\right)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f_2(z)\, dz \\
&+ \chi_{\Gamma(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tfrac{1}{|x-z|^m} - \tfrac{1}{|x_0-z|^m} \right) \prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j; x, z\right) \psi_t(y-z) f_2(z)\, dz
\end{aligned}$$

$$+\chi_{\Gamma(x_0)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)-R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)\right)\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)}{|x_0-z|^m}\psi_t\left(y-z\right)$$
$$\times f_2\left(z\right)dz$$
$$+\chi_{\Gamma(x_0)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)-R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x_0,z\right)\right)\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)}{|x_0-z|^m}\psi_t\left(y-z\right)$$
$$\times f_2\left(z\right)dz$$
$$-\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{\alpha_1!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m}-\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x_0,z\right)(x_0-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right]$$
$$\times D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(z\right)\psi_t\left(y-z\right)f_2\left(z\right)dz$$
$$-\sum_{|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m}-\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)(x_0-z)^{\alpha_2}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right]$$
$$\times D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(z\right)\psi_t\left(y-z\right)f_2\left(z\right)dz$$
$$+\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m}-\frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right]$$
$$\times D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(z\right)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(z\right)\psi_t\left(y-z\right)f_2\left(z\right)dz$$
$=I_5^{(1)}+I_5^{(2)}+I_5^{(3)}+I_5^{(4)}+I_5^{(5)}+I_5^{(6)}+I_5^{(7)}$yazarız. Ayrıca, Lemma 0.2 ve

$$|b_{Q_1}-b_{Q_2}|\leq C\log\left(\frac{|Q_2|}{|Q_1|}\right)\|b\|_*\quad Q_1\subset Q_2 \text{ için}$$

eşitsizliğinden (bakınız: [24]) $x\in Q$ ve $z\in 2^{k+1}\tilde{Q}\diagdown 2^k\tilde{Q}$ için

$$\begin{aligned}\left|R_m\left(\tilde{A};x,z\right)\right| &\leq C\left|x-z\right|^m\sum_{|\alpha|=m}\left(\|D^\alpha A\|_*+\left|(D^\alpha A)_{\tilde{Q}(x,z)}-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}\right|\right)\\ &\leq Ck\left|x-z\right|^m\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_*\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $C>0$ sabiti vardır.

$x\in Q$ ve $z\in\mathbb{R}^n\diagdown\tilde{Q}$ için $|x-z|\sim|x_0-z|$ olduğundan ve $a\geq b>0$ için $a^{1/2}-b^{1/2}\leq(a-b)^{1/2}$ eşitsizliğinden ve Lemma 0.4 ün ispatına benzer şekilde

$$\left\|I_5^{(1)}\right\|$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}$$

$$\times\left[\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\left(\begin{array}{c}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}\left|R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)\right|}{|x-z|^{m}}\\ \times\left|\psi_t\left(y-z\right)\right|\left|f_2\left(z\right)\right|\left|\chi_{\Gamma(x)}\left(y,t\right)-\chi_{\Gamma(x_0)}\left(y,t\right)\right|\end{array}\right)^{2}\frac{dydt}{t^{n+1}}\right]^{1/2}dz$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}\left|R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)\right||f_2(z)|}{|x_0-z|^{m}}$$

$$\times\left|\int\limits_{\Gamma(x)}\frac{1}{(t+|y-z|)^{2n+2-2\delta}}\frac{dydt}{t^{n-1}}-\int\limits_{\Gamma(x_0)}\frac{1}{(t+|y-z|)^{2n+2}}\frac{dydt}{t^{n-1}}\right|^{1/2}dz$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}\left|R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)\right||f_2(z)|}{|x_0-z|^{m}}$$

$$\times\left(\iint\limits_{|y|\leq t}\left|\frac{1}{(t+|x+y-z|)^{2n+2}}-\frac{1}{(t+|x_0+y-z|)^{2n+2}}\right|\frac{dydt}{t^{n-1}}\right)^{1/2}dz$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}\left|R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)\right||f_2(z)|}{|x_0-z|^{m}}\left(\iint\limits_{|y|\leq t}\frac{|x-x_0|}{(t+|x+y-z|)^{2n+3}}\frac{dydt}{t^{n-1}}\right)^{1/2}dz$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2}R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)|f_2(z)||x-x_0|^{1/2}}{|x_0-z|^{m+n+1/2}}dz$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\|D^{\alpha}A_j\|_{*}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^{k}\tilde{Q}}k^{2}\frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x_0-z|^{n+1/2}}\left|f\left(z\right)\right|dz$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\|D^{\alpha}A_j\|_{*}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}2^{-k/2}\frac{1}{\left|2^{k}\tilde{Q}\right|}\int\limits_{2^{k}\tilde{Q}}\left|f\left(z\right)\right|dz$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\|D^{\alpha}A_j\|_{*}\right)M\left(f\right)\left(\tilde{x}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\| I_5^{(2)} \right\| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x - x_0|}{|x_0 - z|^{m+n+1}} \prod_{j=1}^{2} \left| R_{m_j}\left(\tilde{A}_j; x, z\right)\right| |f_2(z)|\, dz \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}} k^2 \frac{|x - x_0|}{|x_0 - z|^{n+1}} |f(z)|\, dz \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-k} \frac{1}{\left|2^k\tilde{Q}\right|} \int_{2^k\tilde{Q}} |f(z)|\, dz \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) M(f)(\tilde{x})
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$I_5^{(3)}$ ve $I_5^{(4)}$ için

$$R_m\left(\tilde{A}; x, z\right) - R_m\left(\tilde{A}; x_0, z\right) = \sum_{|\beta|<m} \frac{1}{\beta!} R_{m-|\beta|}\left(D^\beta \tilde{A}; x, x_0\right)(x - z)^\beta$$

formülünden (bakınız:[5]) ve Lemma 0.2 den

$$\left| R_m\left(\tilde{A}; x, z\right) - R_m\left(\tilde{A}; x_0, z\right)\right| \leq C \sum_{|\beta|<m} \sum_{|\alpha|=m} |x - x_0|^{m-|\beta|} |x - z|^{|\beta|} \|D^\alpha A\|_*$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Böylece, Lemma 0.4 ün ispatına benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left\| I_5^{(3)} \right\| &\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}} k \frac{|x - x_0|}{|x_0 - z|^{n+1}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) M(f)(\tilde{x})
\end{aligned}$$

ve

$$\left\| I_5^{(4)} \right\| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) M(f)(\tilde{x})$$

bulunur.

Yine Lemma 0.4 ün ispatına benzer şekilde ve $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left\| I_5^{(5)} \right\| \\
&\le C \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \begin{matrix} \left[\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m} - \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x_0,z\right)(x_0-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m} \right] \\ \times\psi_t\left(y-z\right) \end{matrix} \right\| \\
&\times \left| D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(z\right)\right| \left|f_2\left(z\right)\right| dz \\
&\le C \sum_{|\alpha|=m_2} \left\|D^{\alpha}A_2\right\|_* \sum_{|\alpha_1|=m_1} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(2^{-k/2}+2^{-k}\right) \\
&\times \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} \left| D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(y\right)\right|^{q'} dy \right)^{1/q'} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} \left|f\left(z\right)\right|^q dz \right)^{1/q} \\
&\le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \left\|D^{\alpha}A_j\right\|_* \right) M_q\left(f\right)\left(\tilde{x}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\left\| I_5^{(6)} \right\| \le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \left\|D^{\alpha}A_j\right\|_* \right) M_q\left(f\right)\left(\tilde{x}\right)$$

elde edilir.

Son olarak $I_5^{(7)}$ için ise, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1$ olmak üzere $r_1,r_2>1$ alarak

$$\begin{aligned}
&\left\| I_5^{(6)} \right\| \\
&\le C \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \left[\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m} - \frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m} \right] \psi_t\left(y-z\right) \right\| \\
&\times \left| D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(z\right)\right| \left| D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(z\right)\right| \left|f_2\left(z\right)\right| dz \\
&\le C \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(2^{-k/2}+2^{-k}\right) \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} \left|f\left(y\right)\right|^q dy \right)^{1/q} \\
&\times \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} \left| D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(y\right)\right|^{r_1} dy \right)^{1/r_1} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} \left| D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(y\right)\right|^{r_2} dy \right)^{1/r_2} \\
&\le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \left\|D^{\alpha}A_j\right\|_* \right) M_q\left(f\right)\left(\tilde{x}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\|I_5\| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})$$

olur.

Sonuç olarak, (8) in ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de (9) nin tahminine dönelim. Q, $\tilde{Q}$, $\tilde{A}_j(x)$, f_1 ve f_2 (8) in ispatındaki gibi aynısı olsun.

$$F_t^A(f)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j+1}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)\,dz$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz$$

$$+\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)\, D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz$$

olarak yazarsak bu durumda

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\mu_\Omega^A(f)(x) - \mu_\Omega^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)\right| dx$$

$$\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|\chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) - \chi_{\Gamma(x_0)} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\| dx$$

$$\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\| \chi_{\Gamma(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz \right\| dx$$

$$+\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\| \chi_{\Gamma(x)} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)\,dz \right\| dx$$

$$+\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left\|\chi_{\Gamma(x)}\sum_{|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m}D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(z\right)\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}f_1\left(z\right)dz\right\|dx$$

$$+\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left\|\begin{array}{c}\chi_{\Gamma(x)}\sum\limits_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\\ \times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1\left(z\right)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2\left(z\right)\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}f_1\left(z\right)dz\end{array}\right\|dx$$

$$+\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left\|\chi_{\Gamma(x)}F_t^{\tilde{A}}\left(f_2\right)(x,y)-\chi_{\Gamma(x_0)}F_t^{\tilde{A}}\left(f_2\right)(x_0,y)\right\|dx$$

$$:=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5$$

olur. Buradan, (8) nın ispatına benzer şekilde sırasıyla

$$\begin{aligned}J_1 &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_*\right)\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left|\mu_\Omega\left(f_1\right)(x)\right|dx\\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_*\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left|\mu_\Omega\left(f_1\right)(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\left\|D^{\alpha}A_j\right\|_*\right)M_q\left(f\right)(\tilde{x}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2 &\leq C\sum_{|\alpha_2|=m_2}\left\|D^{\alpha_2}A_2\right\|_*\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left|\mu_\Omega\left(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1f_1\right)(x)\right|dx\\ &\leq C\sum_{|\alpha_2|=m_2}\left\|D^{\alpha_2}A_2\right\|_*\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mu_\Omega\left(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1f_1\right)(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\left\|D^{\alpha}A_j\right\|_*\right)M_q\left(f\right)(\tilde{x}),\end{aligned}$$

$$J_3\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}\left\|D^{\alpha}A_j\right\|_*\right)M_q\left(f\right)(\tilde{x})$$

ve

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} \left|\mu_\Omega\left(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 D^{\alpha_2}\tilde{A}_2 f_1\right)(x)\right| dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\mu_\Omega\left(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 D^{\alpha_2}\tilde{A}_2 f_1\right)(x)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_*\right) M_q(f)(\tilde{x}),
\end{aligned}$$

elde edilir.

J_5 için,

$$\begin{aligned}
&\chi_{\Gamma(x)} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x,y) - \chi_{\Gamma(x_0)} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{\Gamma(x)} - \chi_{\Gamma(x_0)}\right) \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1-\delta}} f_2(z)\, dz \\
&+\chi_{\Gamma(x_0)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x-z|^m} - \frac{1}{|x_0-z|^m}\right) \prod_{j=1}^{2} R_{m_j}\left(\tilde{A}_j;x,z\right) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)\, dz \\
&+\chi_{\Gamma(x_0)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right) - R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)\right) \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)}{|x_0-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)\, dz \\
&+\chi_{\Gamma(x_0)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right) - R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x_0,z\right)\right) \frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)}{|x_0-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)\, dz \\
&- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x,z\right)(x-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m} - \frac{R_{m_2}\left(\tilde{A}_2;x_0,z\right)(x_0-z)^{\alpha_1}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right] \\
&\times \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) f_2(z)\, dz \\
&- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x,z\right)(x-z)^{\alpha_2}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m} - \frac{R_{m_1}\left(\tilde{A}_1;x_0,z\right)(x_0-z)^{\alpha_2}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right] \\
&\times \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) f_2(z)\, dz \\
&+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x)}}{|x-z|^m} - \frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}\chi_{\Gamma(x_0)}}{|x_0-z|^m}\right] \\
&\times \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) f_2(z)\, dz
\end{aligned}$$

yazabiliriz, bu durumda Lemma 0.4 ün ispatına benzer şekilde

$$\|J_5\| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha A_j\|_* \right) M_q(f)(\tilde{x})$$

elde edilir, bu da (9) nin ispatını tamamlar. ■

Kısım IV

ANA SONUÇ

Bu bölümde aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 0.2 $1 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$, $w \in A_1$, $|\alpha| = m_j$ *ve* $j = 1, \ldots, l$ *olmak üzere tüm* α *için* $D^\alpha A_j \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Bu durumda*

$$\left\|S_\psi^A(f)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} A_j\|_* \right) \|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}; \tag{10}$$

$$\left\|\mu_\Omega^A(f)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} A_j\|_* \right) \|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}. \tag{11}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ *sabiti vardır.*

İspat. İlk önce (10) eşitsizliğini ispatlayacağız. Bunun için, Lemma 0.5 de $1 < q < p$ alarak ve Lemma 0.3 den

$$\begin{aligned}
\left\|S_\psi^A(f)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} &\leq C \left\|M\left(S_\psi^A(f)\right)\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \\
&\leq C \left\|\left(S_\psi^A(f)\right)^\#\right\|_{L^{p,\varphi}(w)} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha_j} A_j\|_* \right) \|M_q(f)\|_{L^{p,\varphi}(w)} \\
&\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha_j} A_j\|_* \right) \|f\|_{L^{p,\varphi}(w)}.
\end{aligned}$$

elde ederiz, bu da (10) ün ispatını tamamlar.Ayrıca (11) ün ispatı (10) ün ispatındaki gibi benzer şekilde devam ettiğinden, detayları atlayıp Teorem 0.2 in ispatı tamamlanır. ■

Kısım V

BİLGİLENDİRME

Bu çalışma, **"İzmir Matematik Günleri-V, 27-29 Eylül 2023, Çevrimiçi, İzmir, Türkiye"** başlıklı sempozyumda sözlü sunum olarak sunulmuştur.

Kısım VI

KAYNAKÇA

Kaynakça

[1] M. Balcı, Reel Analiz, Palme Yayınevi, Ankara, 2017.

[2] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, Proc. Nat. Acad. Sci. 48 (3) (1962), 356-365.

[3] S. Chanillo, A note on commutators, Indiana Univ. Math. J. 31 (1) (1982), 7-16.

[4] R. R. Coifman and R. Rochberg, Another characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (2) (1980), 249-254.

[5] J. Cohen and A. Gosselin, BMO estimate for multilinear singular integrals, Illinois J. Math. 30 (1986), 445-464.

[6] Y. Ding and S. Z. Lu, Weighted boundedness for a class rough multilinear operators, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 17 (3) (2001), 517-526.

[7] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland Mathematics Studies, 116. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[8] L. Grafakos, Modern Fourier analysis. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2014.

[9] F. Gürbüz, Some estimates for generalized commutators of rough fractional maximal and integral operators on generalized weighted Morrey spaces, Canad. Math. Bull. 60 (1) (2017), 131-145.

[10] F. Gürbüz, A note concerning Marcinkiewicz integral with rough kernel, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 24 (1) (2021), Paper No. 2150005, 14 pp.

[11] F. Gürbüz, Product generalized local Morrey spaces and commutators of multi-sublinear operators generated by multilinear Calderon-Zygmund operators and local Campanato functions, Filomat 35 (9) (2021), 2849–2868.

[12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. 54 (1) (1930), 81-116.

[13] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. 104 (1-2) (1960), 93-140.

[14] G. Hu and D. C. Yang, A variant sharp estimate for multilinear singular integral operators, Studia Math. 141 (1) (2000), 25-42.

[15] J. Marcinkiewicz, Sur quelques integrales de type de Dini, Annales de la So-ciété Polonaise de Mathematique. 17 (1938), 42-50.

[16] U. Neri, Singular integrals. Notes for a course given at the University of Maryland, College Park, Md., 1967. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 200. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[17] C. Pérez and G. Pradolini, Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integral operators, Michigan Math. J. 49 (1) (2001), 23-37.

[18] C. Pérez and R.Trujillo-González, Sharp weighted estimates for multilinear commutators, J. London Math. Soc. 65 (3) (2002), 672-692.

[19] J. Peetre, On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces, J. Func. Anal. 4 (1969), 71-87.

[20] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[21] C. Sadosky, Interpolation of operators and singular integrals. An introduction to harmonic analysis. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 53. Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[22] E. M. Stein, On the functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (2) (1958), 430-466.

[23] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[24] E. M. Stein, Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[25] A. Torchinsky, Real-variable methods in harmonic analysis. Pure and Applied Mathematics, 123. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

[26] A. Zygmund, On certain integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 170-204.

Sharp Maksimal Fonksiyonlar Yoluyla Bir Sınıf Multilineer İntegral Operatörler İçin Ağırlıklı Eşitsizlikler

Doç. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Yazarımız 2 Nisan 1984 tarihinde Ayvalık/Balıkesir'de dünyaya geldi. İlk, orta, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2008 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Lisans derecesini aldı. 2011 ve 2015 yıllarında yine Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde sırasıyla Yüksek Lisans ve Doktora derecelerini aldı. 2019 yılında Doçent oldu. 2017-2023 yılları arasında Hakkâri Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde öğretim üyesi olarak çalıştı. 10 Nisan 2023 itibariyle Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümünde öğretim üyesi olarak çalışmaya başlamıştır. Yazarın uluslararası dergilerde ve kitaplarda pek çok çalışması, editörlükleri ve hakemlikleri bulunmaktadır.

ÖZGÜR
YAYINLARI

ISBN 978-975-447-801-3