Bölüm 10

Matematik Öğretmenlerinin Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Hataya Yaklaşımları

Murat Duran[1]

Abdullah Kaplan[2]

Özet

Bu çalışmanın amacı lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevine yönelik hataya yaklaşımlarını araştırmaktır. Bu amaçla öğretmenlerin hataya yaklaşımları; hatanın kaynağını gerekçelendirme ve hatayı gidermek için öğretim yaklaşımı sergileme olmak üzere iki bölümde incelenmiştir. Çalışmada nitel araştırma modellerinden özel durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları Millî Eğitim Bakanlığı'na (MEB) bağlı genel liselerde görev yapan 5 matematik öğretmenidir. Çalışmanın veri toplama aracı araştırmacılar tarafından geliştirilmiş olan hata temelli senaryolardır. Çalışmanın verileri öğretmenlerle yapılan bire bir görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Çalışmanın ilk bölümünün verileri açık kodlama yardımıyla analiz edilirken ikinci bölümdeki veriler ise betimsel analiz yardımıyla incelenmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarına yönelik müdahaleleri "açıklama-gösterme", "bilgi sunma", "fark ettirme" ve "düşünceyi anlama veya ileri taşıma" olmak üzere 4 yaklaşımla açıklanmıştır. Çalışmanın bulguları öğretmenlerin, üç senaryodan birinde hatanın gerekçesini tam olarak doğru belirleyemediklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bulgular öğretmenlerin hataya yaklaşım bağlamında uygun stratejiler üretmede yetersiz kaldıklarını göstermiştir.

1. GİRİŞ

Matematik; fonksiyonlardaki değişimleri inceleyen ve limit, türev, integral gibi konuların öğretildiği bir bilim dalıdır. Matematikle ilgilenen

1 Dr. Öğretim Üyesi, Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, drmurat05@gmail.com ORCID ID: 0000-0002-4612-7117

2 Prof. Dr., Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, akaplan@atauni.edu.tr ORCID ID: 0000-0001-6743-6368

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub383.c1711

bireyler -mühendislik ve ekonomi bilim alanları da dahil olmak üzere- matematiğin temel teoreminden beslendiği düşünülen diferansiyel ve integral hesaplamaları üzerinde yoğun şekilde uğraş vermektedir (Kandeel, 2021). Eğrilerin eğimleri ve değişim oranları üzerinde yapılan araştırmalar ile eğriler arasındaki ve altındaki alanlara yönelik miktarsal birikimlere odaklanılan çalışmalar bu uğraşıya örnektir. Gerek değişim oranı gerekse alanların miktarsal birikimleri olsun her iki durumda da bireylerin sonsuz dizilerin-serilerin iyi tanımlanmış bir limite yakınsanması durumundan yararlandıkları göze çarpmaktadır (Kandeel, 2021). Günümüzde matematik eğitimi araştırmalarının sayısı arttıkça öğrencilerin trigonometri, küme teorisi, geometri ve vektörler gibi saf matematik konuları bağlamında türevi anlamaya daha fazla ilgi gösterdikleri görülmektedir (Jones, 2017). Bireyler türev konusundaki saf matematik bilgilerini uygulamalı matematik yoluyla pratik şekilde kullanmaktadır. Türevin kinematik (hareket) anlamını ifade ederken hız ve ivme kavramlarından pratik şekilde yararlanmak bu duruma örnek gösterilebilir. Matematik, fizik ya da diğer bilim dallarının çözümüyle ilgili pek çok şey geometri ve cebir yoluyla çözülemediği için bireyler türev kavramına ihtiyaç duymaktadır (Rohde *et al.*, 2012).

Bir denklemin türevinin nasıl arandığı öğrencilere ilk kez öğretildiğinde onlara $f(x)$ ya da y değişkeni ile açıkça ifade edilen x değişkenine yönelik fonksiyonlar verilir. Yani $y = f(x)$ şeklinde y değişkeninin x değişkeninin görüntüsü olduğu örnekler verilir. Bu tarz bir denklem y'nin x'in açık bir fonksiyonu şeklinde $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ olabilir. Böyle bir denklemin türevi aranırken öğrencilere y'nin türevinin $f'(x)$ olduğu belirtilir. Türev operatörü genellikle x olmak üzere tek değişken cinsinden yazılan denklemin sağ tarafına uygulanır. Her bir terimin türevi, uygun temel türev kuralları kullanılarak alınır ve daha sonra da elde edilen terimler gerektiği şekilde birleştirilip basit hale indirgenir. Sonuç olarak $f'(x) = 2x - 2$ ifadesi kolaylıkla yazılır. Ancak tüm denklemlerin fonksiyon olmadığı bilinmektedir. $x^2 + y^2 = r^2$ şeklinde $-r \leq x \leq r$ aralığında x'in bazı seçeneklerinden dolayı fonksiyon olamayan çember denkleminde olduğu gibi $(x, y) \in R$ olmak üzere merkezi $M(0,0)$ orijin, yarıçapı $r = 1$ br olan $x^2 + y^2 = 1$ biçimindeki birim çemberin denklemini, y'nin x cinsinden bir fonksiyonuna dönüştürmeye çalışmak bir problemdir. Birim çember denkleminde ancak çemberi ortadan ikiye bölerek x'e bağlı $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(y \geq 0)$ fonksiyonu ile yine $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı $y = -\sqrt{1 - x^2}$ $(y \leq 0)$ fonksiyonunu yazarak kapalı olmayan bu fonksiyonlarda ayrı ayrı türev alıp herhangi bir x değerinin; türevi ya da herhangi bir noktadaki eğimi bulunabilir. Burada $-1 \leq x \leq 1$ aralığında y değişkeni ile $\sqrt{1 - x^2}$ ve $-\sqrt{1 - x^2}$ ifadelerinin aynı değişime sahip oldukları unutulmamalıdır.

Peki verilen ifade $2x^2 + 3y^2 + 5 = \cos(4x) - \sin(4y)$ şeklinde olsaydı ne olurdu? Burada *x* ile *y* değişkenleri arasındaki ilişki örtük tanımlandığından ve değişkenler arasında kapalı bir bağıntı olduğundan ifadenin türevini açık şekilde aramak mümkün gözükmemektedir. Kapalı fonksiyonun türevinin devreye girdiği yer ise tam da burasıdır (Chu, 2019). Birim çember örneğindeki gibi denklemleri açık hale getirmeye çalışmak yerine kapalı türev alarak zincir kuralından yararlanıp sonuca ulaşılır. Nitekim $2x^2 + 3y^2 + 5 = \cos(4x) - \sin(4y)$ örneğinde istenilse de *y* bağımlı değişkeni *x* bağımsız değişkeninin görüntüsü olarak yazılamayacak ve ifade $y = f(x)$ haline dönüştürülemeyecektir. Burada *x* ve *y* olmak üzere iki farklı değişkenden oluşan bir denklemin belirli bir değişkene (genelde *x* değişkeni) göre farklılaştırılması ve diğer değişkenin (*y* değişkeni) zincir kuralı kullanılarak belirtilen değişkenin örtülü bir fonksiyonu olarak çözüme gidilmesi (Stewart, 2012) kapalı fonksiyonun türevine uygun bir problem çözme becerisi olarak kabul edilebilir. Bu örnekte kapalı fonksiyonda *y* değişkeninin *x* değişkeni cinsinden ne olduğu açık bir şekilde ortaya koyulmadığından türev aranırken örtülü işleve yönelik becerilerin sergilenmesi gerektiği görülür. Kapalı fonksiyonun türevini arama, bir denklemin belirli bir değişkene göre türevinin arandığı ve diğer tüm değişkenlerin ise o değişkenin fonksiyonları olarak ele alındığı bir tekniktir (Stratton, 2021). Kapalı fonksiyonun türevi $F(x, y) = 0$ denkleminin *y*'yi denklemi sağlayan (a, b) yakınındaki *x* noktalarının bir fonksiyonu olarak tanımlandığı durumları ortaya koyar (Stewart, 2012). Örtük tanımlanan ve açık olmayan herhangi bir *y* fonksiyonuna kapalı fonksiyon adı verilir (Borji & Martinez-Planell, 2019). Bu şekilde aranan türev y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ notasyonlarıyla gösterilebilir. Kapalı fonksiyonun türevinde türev operatörü bir denklemin her iki tarafına da aynı anda uygulanmaktadır. Uygulama öncesinde denklemin yeniden düzenlenmesi şart değildir. Bu şekilde açık olmayan denklemlerin fonksiyon olup olmadıkları sorun edilmeden kapalı türev arama işlemi yapılabilir (Chu, 2019). Açık olmayan denklemler için türev aranırken yeni bir öğeyi ortaya koyan bir ya da daha fazla değişken devreye girer. Türev arama işlemi yapılırken değişkenlerin, denklemin farklılaştırdığı değişkenin fonksiyonları olarak düşünülmesi gerekir. Aşağıda birim çember denklemi örneğinde kapalı türev ve zincir kuralı yardımıyla ifadenin türevinin nasıl arandığını inceleyelim.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2(x)) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 - 2x$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = -\frac{x}{y}$$

Birim çember denkleminin kapalı türev yoluyla ve zincir kuralı yardımıyla türevinin aranma süreci incelendiğinde öncelikle denklemin sol ve sağ taraflarına $\frac{d}{dx}$ türev operatörünün uygulandığı görülür. Denklemin sol tarafında toplamın türevi özelliğinden hareketle ($\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$) için kuvvet kuralının ve ($\frac{d}{dx}(y^2)$) ifadesi için zincir kuralının uygulandığı; yine denklemin sağ tarafında ise ifade sabit terim olduğundan $\left(\frac{d}{dx}(1)\right)$ türevin 0 olduğu görülür. Denklemin sol tarafında uygulanan zincir kuralı, ($\frac{d}{dx}(y^2)$) ifadesinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle ilgili ifade $\frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx}$ biçiminde yazılmıştır. Yani önce y^2'nin y'ye göre türevi aranır sonra y'nin x'e göre türevi olan $\frac{dy}{dx}$ değişim oranı ifadesiyle çarpım yapılır. Burada y'nin bir sabit olmadığı ve x'e göre değiştiği unutulmamalıdır. Zincir kuralında y^2 ifadesinin x'e göre türevi arandığından y^2'nin x'e bağlı olduğu ve x'in türevlenebilir bir fonksiyonu gibi davrandığı düşünülebilir. Hatta $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(y^2(x))$ düzenlemesi yapılarak da işleme devam edilebilir. Yapılan matematiksel işlemler sonucunda $\frac{dy}{dx}$ değişim oranına karşı gelen sonuç bulunur. Bulunan sonuç üzerine y'nin x'e göre türevini ya da tanım kümesinin herhangi bir noktasındaki teğet denkleminin eğimini veren bir ifade elde edilir.

Analiz alanındaki bilimsel gelişmelerin bir sonucu olarak ortaya çıkan zincir kuralı; örtük türev, kinematik ve diferansiyel denklemlerle ilgili problemlerde sıklıkla kullanılan doğal bir algoritmadır (Cottrill, 1999; Heo, 2019). Zincir kuralının anlaşılması bir bileşke fonksiyondaki bağımlı ve bağımsız değişkenlerin rollerinin açık şekilde anlaşılmasına bağlıdır (Hassani, 1998). Geniş ölçüde fonksiyon bilgisine dayanan zincir kuralı, farklı niceliklerdeki değişimleri açıklamaya yönelik genelleştirilmiş bir kuraldır (Chu, 2019; Park & Lee, 2016). Zincir kuralının işlevi incelendiğinde iç fonksiyonun türevinin dış fonksiyonun türevini telafi etmesi ya da ölçeklendirmesi durumu söz konusudur (Cottrill, 1999; Sneyd, Fewster & McGillivray, 2022). Türev ve fonksiyon kavramları üzerine inşa edilen zincir kuralı, niceliklerdeki değişiklikler arasındaki ilişkileri organize etme fırsatını (Lutzer, 2003) ve bileşke fonksiyonun türevindeki çarpımsal yapının fark edilmesini sağlar (Hassani, 1998). Ancak zincir kuralının günlük hayatla ilişkilendirilmeden sadece fonksiyon gösterimindeki cebirsel ifadelerle (örn. Leibniz notasyonu) formüle edilmesi, bu kavramın öğrenciler tarafından bir sembol manipülasyonu veya cebirsel bir hile şeklinde anlaşılmasına neden olabilmektedir (Cottrill, 1999). Literatürde öğrencilerin zincir kuralının nereden geldiğini bilmediklerini (Gordon, 2005), kuralı kullanırken farkında olmadıklarını (Clark *et al.*, 1997) ve hatta kuralda yer alan notasyonları sadeleştirmeye çalıştıklarını (Tall, 1993) yansıtan sonuçlar yer almaktadır. Kapalı veya bileşke gibi gömülü fonksiyonların yapılarından kaynaklanan durumlar türev konusunda öğrencilerin zincir kuralını kullanmalarını zorlaştırabilmektedir (Horvath, 2008; Maharaj, 2013).

Bir konuya yönelik matematiksel anlayış, o konudaki prosedürü ezberlemekle değil konuyu açıklama, keşfetme ve anlamlandırma ile gelişmektedir (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000). Öğrencilerin zincir kuralındaki matematiksel anlayışlarını geliştirmek amacıyla Amerika Birleşik Devletleri (ABD) ile Avustralya gibi ülkelerin matematik öğretim programlarında zincir kuralının günlük hayatla ilişkili yapısı üzerinde durularak uygulamaların yapılması (National Math and Science Initiative [NMSI], 2014; Queensland Curriculum & Assessment Authority [QCAA], 2014) ve bu kuralın doğruluğunun teyidi bağlamında grafik yazılımların kullanılması tavsiye edilmektedir (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2009, 2012; Engelke-Infante, 2007; South Australian Certificate of Education-Board of South Australia [SACE Board of SA], 2009a; 2009b). Literatürde zincir kuralının öğretimi sürecinde kullanılması tavsiye edilen stratejilere kavram haritası (Capistran, 2005), ağaç diyagramı (Thomas *et al.*, 2009) ve ok diyagramı (Thoo, 1995) örnek gösterilebilir. Öğretim stratejilerine yön veren harita ve diyagram gibi öğrenme araçlarında bağımlı değişken, ara değişken ve bağımsız değişken arasındaki ilişki modelleri görselleştirildiğinden bu araçların, zincir kuralının işlevsel yapısının öğretiminde etkili olacağı düşünülmüştür (Ärlebäck, Doerr & O'Neil, 2013; Lutzer, 2003).

ABD'de merkezi Teksas eyaletinin Dallas şehrinde faaliyet gösteren Ulusal Matematik ve Bilim Girişimi (NMSI), öğrencilerin zincir kuralını kalıcı öğrenebilmeleri için zincir kuralıyla çikolatalı fıstıklı şeker arasında bir analoji geliştirmiştir (NMSI, 2014). Analojide standart bir $\blacksquare\ (\blacktriangle) \rightarrow f(g(x))$ fonksiyonu fıstıklı olmayan sıradan bir çikolatalı şekere benzetilmiştir. Burada $\frac{df}{dx}$ bulunurken $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ zincir kuralı kullanılarak çözüm yapılır. Şeker, çikolata merkezli bir dış katmana ya da kabuğa sahiptir. Şekerin dış katmanı, fonksiyonun dış kısmı veya $\blacksquare$ parçası olarak düşünülmüştür. Çikolata merkezi ise fonksiyonun iç parçası veya parantez içinde görülen $\blacktriangle$ olarak görülmüştür. Örnek vermek gerekirse $y = (3x + 5)^7$ eşitliğinde $\blacktriangle = u = (3x + 5)$ çikolata merkezi olarak görülürken $\blacksquare = u^7$şeker dış katmanıdır.

Öte yandan standart bir çikolatalı şekerden farklı olan $\bullet\ (\blacksquare\ (\blacktriangle)) \rightarrow f(g(h(x))$ fonksiyonu ise fıstıklı çikolatalı şekere benzetilmiştir. Burada $\frac{df}{dx}$ bulunurken $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$ zincir kuralı kullanılarak çözüm yapılır. Şekerin dış katmanında şeker kabuğu, iç katmanında ise çikolata ile bu çikolatanın merkezinde fıstık bulunur. Fıstıklı çikolatalı şekerin dış katmanı, fonksiyonun dış kısmı yani $\bullet\ (\ (\ )\ )$ olarak düşünülmüştür. Çikolata $\blacksquare$, fıstıkların etrafını sardığı için $\blacksquare\ (\ )$'in bir parçası olarak kabul edilir. Son olarak fıstık merkezi ise $\blacksquare\ (\ )$ fonksiyonu içerisinde bulunan fonksiyondaki $\blacktriangle$ olarak görülmüştür. Örnek vermek gerekirse $y = (Cos\ (\pi x))^2$ eşitliğinde $\blacktriangle = u = \pi x$ fıstık merkezi iken $\blacksquare = Cos\ u$ çikolata ve $\bullet = (Cos\ (\pi x))^2 = (Cos\ (u))^2$ şeker dış katmanıdır.

Kapalı türev yoluyla zincir kuralının uygulandığı bir diğer fonksiyon ise bileşke fonksiyondur. Bileşke fonksiyonlar ile bu fonksiyonların türevlerinin analiz dersinin merkezinde yer alan kavramlar arasında oldukları bilinmektedir (Hassani, 1998). Bileşke fonksiyonda *f* ve *g* olmak üzere iki fonksiyon yer almaktadır. Bu fonksiyonlardan *f*'nin görüntü kümesi *g*'nin tanım kümesi olarak kabul edilmektedir. Bileşke fonksiyon, *f* fonksiyonunun girdi değerlerini *g* fonksiyonunun çıktı değerleriyle eşleyip fonksiyonları tek bir fonksiyon altında birleştirerek tanımlamaktadır (Clark *et al.*, 1997; Meel, 2003).

$f: R \rightarrow R$ ve $g: R \rightarrow R$ tanımlı, $\forall x \in R$ için birer fonksiyon olsunlar. $(fog)(x) = f(g(x))$ şeklindeki bileşke fonksiyon *x*'e göre türevlenebilir. Ancak $f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun türevini aramak istediğimizde fonksiyonun kapalı olduğu dikkat çekmektedir. Bu durumda;

$u = g(x)$ ve $y = f(u)$ olmak üzere

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{d(g(x))}[f(g(x))] \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Yukarıdaki ifadede $f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun türevi için Leibniz notasyonuyla $f(u)$'nun $u = g(x)$ noktasında ve $g(x)$'in de x noktasında türevlendiğini varsayarak gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra $f(g(x))$'in x noktasındaki türevine ulaşılır. Burada x'in bağımsız değişken, u'nun ara değişken ve y'nin de bağımlı değişken oldukları unutulmamalıdır. İşlemlerin devamında $f(g(x))$'nin x'teki türevi, f'nin $g(x)$'teki türevi ile g'nin x'teki türevinin çarpımı yani değişim oranlarının çarpımı şeklinde zincir kuralı yardımıyla gösterilmiştir. Zincir kuralının çarpımsal doğası (Engelke-Infante, 2007), x'in g'yi nasıl etkilediğini ve g'nin f'yi aynı anda nasıl etkilediğini kavramsallaştıran iç içe çok değişkenliğin bir ürünüdür (Jeppson, 2019). Zincir kuralı kullanılarak gösterilen bu çarpımsal ifade bir örnekle incelenecek olunursa $\frac{df}{dg}$ için f'nin g'den 2 kat daha hızlı değiştiğini varsayalım. O zaman g'deki her küçük veya sonsuz küçük değişime karşı f'de karşılık gelen değişimin iki kat daha büyük olduğu belirtilebilir. Benzer şekilde $\frac{dg}{dx}$ ifadesi için g'nin x'ten 5 kat daha hızlı değiştiğini varsayalım. O zaman da x'teki her küçük ya da sonsuz küçük değişime karşı g'de karşılık gelen değişimin beş kat daha büyük olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bu durum x'teki her küçük değişime karşılık f'deki değişimin $2.5 = 10$ kat daha büyük olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Günlük hayatta örneğin kürenin hacmi ile ilgili verilen problemlerde de kapalı fonksiyonun türevinden ve zincir kuralından yararlanırız (Thomas *et al.*, 2009). Öyle ki küre şeklindeki bir balon içerisine hava pompaladığımızı varsayalım. Bu durumda balonun hem hacminin hem de yarıçapının zamanla artacağı görülecektir. Belirli bir anda balonun hacmini V, yarıçapını ise r kabul ettiğimizde verilen belirli bir zaman anında yarıçapın ne kadar hızlı arttığını bulmak istediğimizde aşağıdaki gibi işlem yapabiliriz.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Yukarıda kürenin belirli bir andaki hacmini hesaplamak için kapalı olarak verilen formülde zincir kuralı kullanılarak hacmin artış oranı ($\frac{dV}{dt}$) ile yarıçap (r) biliniyorsa yarıçapın ne kadar hızlı arttığı $(\frac{dr}{dt})$ bulunabilir. Burada ilişkili oranlar denklemini bulmak için türev alındığından yarıçapın artış hızı, hacmin artış oranının doğrudan ölçümünden yararlanılarak kolayca hesaplanır (Thomas *et al.*, 2009). Diyelim ki yarıçapın artış hızı $\frac{dr}{dt} = 3\ cm/sn$ bulunsun. Bu durumda zamandaki sonsuz küçük bir değişiklik için türev bir anda ortaya çıksa ve bu türev *t*'deki daha büyük ve farklı değişiklikler için sabit olmasa da türev her 1 saniyelik birim için 3 cm uzunluğa eşit olacak şekilde ifade edilir. Herhangi bir miktarın başka bir miktar değiştikçe ne kadar değişebileceğini kestirebilmenin değişim oranını ilgilendiren işlemlerde önemli olduğu (Carlson *et al.*, 2002) unutulmamalıdır. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta da kürenin hacim formülünde türev ararken "zaman" gibi denklemde açık bir şekilde yer almayan örtülü bir değişkenden yararlanılarak işlemlerin yürütülmesi olmuştur. Hacim (V) ile yarıçap (r) her ikisi de zamanın (t) birer fonksiyonları olduğundan $V(t)$ ve $r(t)$ örtülü bir değişkenin birer fonksiyonu olarak düşünülebilir. Hatta ifade $V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r(t))^3$ olarak da kavramsallaştırılabilir. Burada kapalı bir fonksiyon ile kapalı bir değişkenin fonksiyonunun aslında aynı şeyler olmadığına dikkat edilmelidir. Kapalı bir değişkenin fonksiyonu, mevcut bir değişkenin denklemde mevcut olmayan bir değişkenin fonksiyonudur (Mirin & Zazkis, 2019).

Son olarak lise ve lisans düzeyi matematik ders kitaplarında kapalı fonksiyonun türevi konusu içerisinde yer alan ve daha hızlı, daha basit bir türev arama yöntemi olarak kabul edilen kısmi türev kavramı söz konusudur (Aydın & Erbaş, 2014; Thomas *et al.*, 2009). Bir *f* fonksiyonu birden fazla değişkene bağlıysa ve fonksiyonda bu değişkenlerden sadece bir tanesine göre anlık değişim oranı bulunacaksa kısmi türev kullanılmaktadır. Buradaki amaç, birden çok değişkenden oluşan bir fonksiyon girdisinde değişkenlerden sadece bir tanesini değiştirip (diğer değişkenler sabit terim) fonksiyonun nasıl değiştiğini anlamaya çalışmaktır.

Kısmi türev, kapalı fonksiyonun türevine benzer gibi görünse de $z \in R$, $z = F(x, y)$ gibi iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonda değişkenlerden sadece bir tanesine göre türev arama ve diğer değişkeni sabit tutma bakımından kapalı fonksiyonun türevinden farklılık gösterir (Stratton, 2021). *x* ve *y* değişkenlerine bağlı bir *f* fonksiyonunun *x*'e göre kısmi türevi $\frac{\partial f}{\partial x}$ ile gösterilirken (f, x' e bağlı bir fonksiyon ve *y* sabit), aynı fonksiyonun *y*'ye göre kısmi türevi ise $\frac{\partial f}{\partial y}$ ifadesiyle (f, y'ye bağlı bir fonksiyon ve *x* sabit) gösterilir. Buradaki türevler sadece bir değişkene göre türev aranıp diğer değişkenin sabit kabul edildiği kısmi türev notasyonları oldukları için $\frac{df}{dx}$ ve $\frac{df}{dy}$ gibi sadece tek değişkenli türev operatörü ifadelerinden farklılık arz eder. Aşağıda, bir fonksiyon eğrisine teğet olan bir denklemin eğimini bulurken kullanılan, kapalı fonksiyonların türevini arama görevini fazlasıyla üstlenen ve kapalı fonksiyonun türevine nispeten türev aramada daha kestirme bir yol kabul edilen kısmi türevin aranma süreci açıklanmış ve bu süreç bir dizi işlemle gösterilmiştir. Devamında kısmi türeve yönelik bir örnek sunulmuştur.

$z \in R, z = F(x, y)$ biçiminde iki değişkenli bir fonksiyon tanımlansın. $F(x, y)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu varsayalım. $F(x, y) = 0$ denklemi için *y*'yi *x*'in türevlenebilir kapalı bir fonksiyonu olarak yani $y = f(x)$ şeklinde tanımlayalım. *f*'nin tanım kümesindeki her bir *x* bağımsız değişkeni için $F(x, f(x)) = 0$ yazalım. Bu durumda $z = F(x, y) = 0$ olduğundan $\frac{dz}{dx} = 0$ olmalıdır. *F*'nin türevlenebilir olduğunu biliyoruz. $F(x, y) = 0$ eşitliğinde hem *x* değişkeni hem de $y = f(x)$ değişkeni *x*'in bir fonksiyonu olduğundan zincir kuralı yardımıyla her iki tarafın *x*'e göre türevi alınabilir. Bu durumda;

$$F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Eğer ki $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ise $\frac{dx}{dx} = 1$ olduğundan $\frac{dy}{dx}$ ifadesini çözersek

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F(x, y) = x^2y + y^3x + sin(xy) = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ 'i bulalım?

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$-\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy + y^3 + y.cos(xy)}{x^2 + 3y^2x + x.cos(xy)}$$

Lisans döneminin analiz derslerinde karşılaşılan kapalı fonksiyonun türevi konusu öğrenciler için bir zorluk kaynağıdır (Clark *et al.*, 1997; Martin, 2000). Konuya dönük zorlukların nedenleri ise örtük türev bileşenlerinin ilişkilendirilmesine engel olan ders tasarımı (Borji & Martinez-Planell, 2020), denklemlerin içinde birden fazla *y* teriminin belirmesi (Chu, 2019), matematiksel-cebirsel hatalar (Kandeel, 2021) ve zincir kuralında çarpımsal fonksiyonları ayırt edememe (Kakoma & Makonye, 2010; Puspita, Suryadi & Rosjanuardi, 2023; Tokgöz, 2012) şeklinde özetlenebilir. Örtük türevde konuya dönük hataları minimum seviyeye indirebilmek için öğreticinin iyi bir konu alanı bilgisine hâkim olması gerekir. Çünkü bilgili öğretmenler sayesinde arzu edilen öğretim ortamları oluşturulabilmektedir (Putnam, Heaton, Prawat & Remillard, 1992). Ancak öğretmenin; konuyu çok iyi bilmesi, o konuyu çok iyi öğreteceği anlamına gelmemektedir (Kahan, Cooper & Bethea, 2003). Çünkü matematiğin öğretilme şekli de en az içerik bilgisi kadar önemlidir (Baştürk, 2009; Hare & Philippy, 2004).

Öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik derste etkili ve verimli bir öğretim sergileyebilmesi için öğrencilerin o konudaki hatalarının da farkında olmaları beklenir (De Jong & Van Driel, 2004; Hill & Ball, 2004). Yani öğretmenlerin alan bilgilerini destekleyen, yapılacak hatanın doğasını ve kaynağını belirleme becerilerini yansıtan öğrenci bilgisine de ihtiyaç duyulmaktadır (Ball, Thames & Phelps, 2008; Watkins & Mortimore, 1999). Öğretmenlerin; herhangi bir konu üzerinde öğrenci düşünme biçimlerine yönelik bilgi düzeylerinin yanında, konuya dönük anlayışlarında hatalı yaklaşım sergileyen öğrencilerle karşılaştıklarında onlara nasıl cevap verebildikleri durumu da sahip olunması gereken önemli bir pedagojik yeterliliktir (Even & Markovits, 1995).

Hatalar öğrenme sürecinde bir şeylerin ters gittiğini ve düzeltilmesi gerektiğini ortaya koyan sinyaller olarak nitelendirilir (Borasi, 1987). Hata temelli aktiviteler ise normal öğrenme anlayışından farklı olarak öğrenciyi hatayı keşfetme bağlamında meraklandıran, umutlandıran ve öğrenmeye teşvik eden bir metot olarak değerlendirilir (Gürbüz, Yıldırım & Doğan, 2021). Bu aktiviteler öğrencilerin öğrenmelerini sürekli kılmalarına yardımcı olan bir öğretim stratejisidir (McLaren *et al.*, 2012). Aktivitelerde bir ya da daha fazla yanlış çözüm adımı içeren bir problem cümlesi öğrencilere sunulmaktadır. Öğrenciler bu süreçte hataları analiz edip açıklarlar ve ardından kendi çözümlerini gerekçelendirerek analiz sürecini tamamlarlar (McLaren, Adams & Mayer, 2015). McLaren *et al.* (2012) hata temelli aktivitelerin öğrencilere faydalı olabileceği üç durumdan bahsetmiştir. Birinci durum, hataların başka öğrencilerin uydurdukları hata örneklerinden seçilebilmesidir. Bu sayede hatayı gözden geçiren öğrenci hatanın ortaya çıkmasından kaynaklanan utanç duygusunu ve olası motivasyon kaybını yaşamayacaktır. Bu durumdan dolayı hiçbir öğrenci, sınıf ortamında arkadaşlarının önünde zor durumda kalmamış olacaktır. İkinci durum, hata temelli aktivitelerin etkileşimli, ilgi çekici ve merak uyandıran bir nitelikte olmasıdır. Bu duruma, özellikle geri bildirim sağlayan ve direktiflerle öğrencilerden hatalarını bulup düzeltmelerini isteyen bilgisayar tabanlı materyaller örnek gösterilebilir. Üçüncü durum ise hazırlanacak hata temelli aktiviteler bireysel farklılıkları dikkate alacak şekilde oluşturulmalıdır. Yani, öğrencilere sunulan problem türleri, onların hedef alanla ilgili en derindeki kavram yanılgılarını ve yanlış anlamalarını hedef almalıdır. Öğrencileri hem doğru çalışılmış örneklerle hem de hata analiziyle tanıştırmak, özellikle matematiksel bir kavramın sıklıkla yanlış yapıldığı veya kolayca karıştırıldığı durumlarda faydalıdır (Große & Renkl, 2007). Yanlış bilginin sunumu, öğrenciyi tutarlı bir bilgi yapısı oluşturmaya teşvik eden bilişsel çatışmalara neden olabilir (Große & Renkl, 2007). Curry (2004) hem doğru hem de hatalı örneklerin çözümlerini açıklama ve gerekçelendirme sürecinin, sadece doğru çalışılmış örneklere yönelik çözümleri açıklama ve gerekçelendirme sürecine nispeten öğrenme hedeflerine ulaşmada daha etkili olduğunu ifade etmiştir. Hataları minimize etmenin bir diğer alternatifinin hatalar yoluyla öğrenme olduğu unutulmamalıdır (Borasi, 1996).

Öğrenci hatalarına yönelik tespitin yapılması sayesinde öğretmenler, öğrencilerin yöntemsel ve kavramsal yanlış anlamalarıyla ilgili fikir sahibi olurken (Mercer, Mercer & Pullen, 2013) öğrenciler de hatalarıyla yüzleştikleri için yaptıkları hatalardan ders alabilmektedir (Melis, 2004). Öğrencilerin hataları bazen öğretmenler için doğru yanıtlardan daha bilgilendirici kabul edilmektedir (Kandeel, 2021). Öğretmenlerin, hata teşhisi ve analizi yoluyla öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin anlayışlarının genişliğini ve derinliğini oluşturmaları öğrenme sürecinde önemlidir (Borasi, 1986; 1987; Nyaumwe, 2008). Hatalardan yararlanarak öğrenmek bir öğretim yöntemi olarak kabul edilebilir ve bu yöntem öğrencilerin matematik öğrenimine katkıda bulunabilir (Heinze, 2005). Matematik öğretiminin katalizörü kabul edilen öğrenci hataları, öğrenme hedeflerine ulaşmada dezavantajlı bir durum gibi görünse de aslında kalıcı öğrenme için tasarlanacak uygun stratejilerin belirlenmesinde öğreticiye yol gösterir (Kandeel, 2021; Lannin, Barker, & Townsend, 2007). Öğretim sürecinde henüz değinilmemiş bazı noktaların ortaya çıkmasını sağlayan hatalar, öğrencileri eleştirel düşünmeye teşvik edebilmektedir (Borasi, 1994; 1996).

Öğrencilerin sahip oldukları hataları, fark edememe ya da yanlış anlama konularındaki öğretmen yetersizlikleri öğretimi etkisizleştirirken (Kandeel, 2021) tam tersine öğrencilerin neyi yanlış bildiklerine ve öğrendiklerine yönelik öğretmen farkındalığı da anlamlı öğrenmede etkili olmaktadır (Yetkin, 2003). Öğrenci hatalarından örnekler vererek derse başlayan öğretmenlerin (Bezuidenhout, 2001) uyguladıkları öğretim stratejileri, onların görevlerinde başarılı olmalarına yardımcı olmaktadır (Dawkins & Epperson, 2014). Ancak öğretmenler hataları düzeltmek için gerekli önlemleri almazsa öğrenciler gelecekteki matematik öğrenmelerinde problem yaşayabilirler (Tall & Razali, 1993). Even ve Markovits (1995) öğrenci düşüncelerine ve sorularına karşı verilen öğretmen cevaplarının, öğrencilerin problem üzerinde akıl yürütmelerine ve bilgiyi yapılandırmalarına yardım ettiğinin önemine vurgu yapmıştır. İçerisinde hataların da yer aldığı öğrencilerin düşünme yollarını bilmek öğretmenlerin alan bilgilerini (Gedik, 2014; Tirosh, 2000; Tsamir, 2007), öğrenciyi anlama bilgilerini (Özkaya, 2015) ve öğrenme sürecini pozitif etkilemektedir (Borasi, 1988). Matematik öğretmenlerinin öğrenci anlayışlarını bilme bilgisine verilen önemin yakın zamanda artmasıyla birlikte (NCTM, 2000) ABD'deki Devlet Okulları Yöneticileri Konseyi (NGAC & CCSSO) (2010) bireylerin sadece kendilerinin değil aynı zamanda başkalarının da akıl yürütmeleri hakkında yorum yapabilmelerine yönelik uygulamalar yapılmasını önermiştir. Aynı doğrultuda, eğitim alanında öğretmen yetiştiren kurumlardan öğrencilerin hatalarını analiz edebilecek bireyler yetiştirmeleri beklenmektedir (Graeber, 1999). Bu durum bu çalışmanın yapılmasındaki ilk gerekçedir. Çünkü yapılacak olan bu çalışma sayesinde lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevi konusunda öğrenci hatalarına karşı verdikleri cevapların ve öğretim yaklaşımlarının nasıl olduğu yakından görülmüş olacaktır.

Lisans öğrencilerinin matematik dersinde hataların tespitini ve sebeplerini açıklarken zorlandıkları (Didiş-Kabar & Amaç, 2018; Konyalıoğlu, 2013), öğrencilerden gelebilecek farklı tür hatalara yönelik düşük farkındalık düzeyine (Amaç & Didiş-Kabar, 2019) ve zayıf pedagojik yeterliliğe sahip oldukları (Didiş, Erbaş & Çetinkaya, 2016) bilinmektedir. Çalışmalarda ayrıca matematik öğretmenlerinin öğrencilerin hatalarıyla ilgilenmekten kaçındıkları, hataların; doğasıyla yüzleşmede başarılı olamadıkları ve altında yatan matematiksel kavramlara yönelik derin bir anlayış geliştiremedikleri sonuçlarına ulaşılmıştır (Sapire, Shalem, Wilson-Thompson & Paulsen, 2016). Tsamir ve Tirosh (2005) çalışmasında bazı öğretmenlerin öğrencilere hata temelli aktiviteler sunduklarında öğrencilerin hata yapmaya daha yatkın hale gelebilecekleri korkusuna sahip olduklarını belirtmiştir. Konu alanı bilgisi düşük düzeyde olan öğretmenlerin yanlış yapılandırdıkları bilgileri öğrencilere hatalı şekilde aktardıklarından öğrencilerde değişime karşı daha dirençli hataların ve kavram yanılgılarının gelişmesine neden oldukları gözlenmiştir (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Käpyla, Heikkinen & Asunta, 2009). Kapalı fonksiyonun türevine yönelik hataya yaklaşımın araştırılması, öğretmenlerin öğrenci anlayışlarını bilme ve öğretim stratejileri bilgileri ile konu alanı bilgilerinin değerlendirilmesi bakımından önemlidir. Bahsedilen bu durum çalışmanın yapılmasındaki ikinci gerekçedir. Çünkü hata temelli aktiviteler öğrenme sürecini olumlu etkileyen öğretim stratejileri arasında yer almaktadır (Rushton, 2018). İçerik bilgisi aracılığıyla hata temelli aktiviteler yürütmek, konu alanı bilgisini geliştirmekle birlikte öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini de olumlu etkilemektedir (Borasi, 1989; Heinze & Reiss, 2007). Hataları bir öğrenme fırsatı olarak içselleştiren öğretmenlerin öğretimlerinde, öğrencilerin hata yapma korkularının azaldığı görülmüştür (Rach, Ufer & Heinze, 2013). Bu sonuçlardan anlaşılacağı üzere matematik dersinde hata temelli aktiviteler aracılığıyla yürütülen öğretimin hem öğretmenlerin konu alanı bilgileriyle hem de öğrencilerin bazı matematiksel becerileriyle ve duyuşsal özellikleriyle ilişkili olduğu (Borasi, 1988; 1989; 1994; Cochran, DeRuiter & King, 1993) söylenebilir. Matematik öğretmenlerinin; kapalı fonksiyonun türevi konusundaki hataya yaklaşımlarını ve hatayı ortadan kaldırırken uygulayacakları öğretim stratejilerini belirlemeye yönelik alacakları önlemlerin, öğrenci anlayışlarını bilme bilgileri ile öğretim stratejileri bilgilerinin dolayısıyla bu bilgilere bağlı konu alanı bilgilerinin gelişimine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Matematik derslerinde öğretmenlerin hata temelli aktiviteleri etkili kullanmaları ve oluşturulan bilişsel çatışma ortamlarında uygun öğretim yaklaşımlarıyla öğrencilere rehberlik etmeleri gerekir. Öğretmenler, bir soru özelinde yapılan hatayı düzeltmekle kalmayıp aynı zamanda hatanın kaynağına inme noktasında öğrencilerin düşüncelerini harekete geçirebilmelidir. Çünkü öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin gelişiminde rol oynayan faktörlerden birisinin hataya yaklaşım kavramı olduğu unutulmamalıdır.

Başarısızlık kavramı insanoğlunun pek de hoşlandığı bir olgu değildir. İnsanoğlu çoğu zaman bir alandaki başarısızlıklarını kabul etmek istemez ve başarısızlıklarla yüzleşmeyi reddedip onu görmezden gelmeye çalışır. Başarısızlık kavramının toplumda olumsuz bir etikete sahip olmasından dolayı bireyler başarısızlığa karşı negatif anlayış geliştirmektedir. Aslında mantıklı ve dikkatli düşünüldüğünde başarısızlık kavramı insanların talihlerini başarıya dönüştürmeleri için bir fırsat veya bir sıçrama tahtası olarak düşünülebilir. "Daha yükseğe sıçramak için bazen en dibe vurmak gerekir." sözü günümüzde bireylerin başarılı olamadıklarında kendilerini ya tatmin etmek ya da gerçekten başarmadan önce kendilerini motive etmek için söyledikleri sözlerden birisi olmuştur. Başarısızlıkları fırsata çeviremeyen bireylerin daha büyük başarısızlıklarla karşılaşma durumları da söz konusudur. Bireylerin günlük hayattaki başarısızlıklarını süreklilik haline getirmelerindeki önemli faktörler; başarısızlığa sebep olan yani yanlış yapılan davranışın ne olduğunu düşünmemek, yanlış davranıştan ders çıkarmamak ya da yanlış davranışı doğruya çevirmeye yönelik önlem almamak olarak açıklanabilir. Başarısızlığın merkezinde bulunan ve "yanlış" olarak adlandırılan hataların aslında başarı için birer anahtar oldukları çoğu zaman gözden kaçmaktadır. Başarıya ulaşan insanların başarıdan ziyade başarısızlıklarına ve hatalarına odaklanarak kendilerini geliştirip sonuçta başarıya ulaştıkları dikkat çekmektedir. Bu özelliğe sahip bireyler, başarıya ulaşırken hatalardan yararlanmayı akıllıca bulurlar ve hataları başarıya ulaşmada tetikleyici bir unsur kabul ederler (Baumard & Starbuck, 2005). Başarısızlık ve hata kavramlarına yönelik bahse konu olan durumların ve örneklerin günümüzde eğitim-öğretim alanında yansımaları ve etkileri görülmektedir. Öğretim sürecinin merkezinde olan öğrenciler, öğretmenler tarafından başarılı ya da başarısız şeklinde kategorilere ayrılabilmektedir. Başarısız öğrencilere odaklanıldığında bu öğrencilerin derse yönelik birtakım öğrenme güçlüklerine sahip olduklarından bahsedilmektedir. Ancak öğrencilerin yaptıkları hataların ya da sahip oldukları öğrenme güçlüklerinin kaynağının sadece kendileri olmadığı aynı zamanda öğretmenlerin de bu hatalar ve yanlış öğrenmeler üzerinde ciddi etkilerinin olduğu (Erskine, 2010) unutulmaktadır. Öğrencilerin; kapalı fonksiyonun türevine yönelik düşünme şemalarını ve anlayışlarını bilmek kalıcı öğrenme için önemli olduğundan (Carpenter, Fennema & Franke, 1996), kapalı fonksiyonun türevindeki hataya yaklaşımları belirlemede ve bu hatalara önlemler almada öğretmenlere büyük görevler düşmektedir. Kapalı fonksiyonun türevinde x bağımsız değişkeni ile y bağımlı değişkeni üzerine yüklenen anlamlar, bu değişkenler arasındaki ilişkiler ile zincir kuralının uygulaması gibi hususlarda hata yapan öğrencilerin hatalarının neden yapıldığının farkında olan ve bu hataları gidermeye yönelik farklı stratejiler uygulayan matematik öğretmenlerinin öğretim sürecinde öğrenciler üzerinde etkisinin olacağı düşünülmektedir. Bu durum bu çalışmanın yapılmasındaki üçüncü gerekçedir. Çünkü, öğrencilerin kapalı fonksiyonun türevi konusunda hataların kaynağına ulaşmaya ve hataları giderirken sergileyecekleri öğretim yaklaşımlarını belirlemeye yönelik becerilerin kazandırılması için öğretmenlerin öncelikle kendilerinin o konu özelinde hataya yaklaşım becerilerine sahip olmaları gerekir.

Öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevi konusunda kendilerinin sahip olmadıkları hataya yaklaşım becerilerini öğrencilere kazandırırken birtakım öğretim zorlukları yaşayabilecekleri ihtimal dahilindedir. Hataya yaklaşma (öğrenci bilgisi) ve hatayı gidermeye yönelik uygulamalar yürütme (öğretim stratejileri bilgisi) bağlamında bilgi ve deneyime sahip olmak bir öğretmende bulunması arzu edilen en önemli pedagojik yeterlilikler arasında gösterilmektedir (Shulman, 1986). Buradan hareketle eğitim yuvalarında matematik öğretmenlerinin öğretim becerilerini geliştirmeye yönelik hata temelli aktivitelerin yapılması gerekir. Yine hata temelli aktivitelerin sürdürülebilirliği ve etkililiği bakımından matematik öğretmenleri üzerinde bilimsel araştırmaların yürütülmesinde fayda vardır. Yürütülecek olan araştırmalarda matematik öğretmenlerinin hataya yaklaşım becerilerine ne derece sahip oldukları da görülmüş olacaktır.

Son yıllarda hataya yaklaşım bakımından öğrenci anlayışlarını bilme bilgisine, hatayı gidermede uygulanacak öğretim bakımından ise strateji bilgisine yönelik çalışmaların sayısındaki artış dikkat çekicidir. Bu artışın nedeni öğretmenlerin, öğrencilerin düşünme şekilleri bilgisine sahip olmalarına verilen önem olarak açıklanabilir (Didiş *et al.*, 2016). Uluslararası ya da ulusal literatürde hataya yaklaşım konusunda gerçekleştirilen çalışmalarda; öğrencilerin belirli bir konu özelindeki hatalarının tespiti, hataların tespitinin pedagojik alan bilgisiyle ilişkilendirilmesi ve hatayı önleme stratejisinin geliştirilmesi için sunulan fırsatlara vurgu gibi ortak sonuçlara ulaşılmıştır (Demirci, Özkaya & Konyalıoğlu, 2017; Didiş *et al.*, 2016; Didiş, Erbaş, Çetinkaya, Çakıroğlu & Alacacı, 2016; Konyalıoğlu, 2013; Muzangwa & Chifamba, 2012; Santagata & Yeh, 2014; Siyepu, 2013; 2015; Son, 2013; Son & Sinclair, 2010; Wilson, Lee & Hollebrands, 2011; Wilson, Mojica & Confrey, 2013). Çalışmalardaki bir diğer ortak özellik ise araştırmaların öğretmen adaylarıyla yürütülmüş olmasıdır. Çalışmaların pedagojik alan bilgisiyle olan ilişkileri düşünüldüğünde matematik öğretmen adaylarından elde edilen bilgilerin lise matematik öğretmenlerinin; hataya yaklaşım bağlamındaki öğrenci anlayışlarını bilme ile öğretim stratejileri bilgilerini belirlemede ve durumlarını tam olarak yansıtmada yetersiz kalabileceği (Duran & Kaplan, 2016) söylenebilir. Bu nedenle mevcut çalışmanın öğretmenlik mesleğini bilhassa deneyimleyen ve öğretim sürecini rehber olarak yönlendiren lise matematik öğretmenleriyle yapılmasına karar verilmiştir. Literatürde hataya yaklaşım bakımından matematiğin sayılar, kesirler, cebirsel ifadeler, dizi, türev ve integral konularında öğretmenlerle yürütülen araştırmalar da mevcuttur (An & Wu, 2012; Chick & Baker, 2005; Durkaya *et al*., 2011; Leiß & Wiegand, 2005). Yapılan bu çalışmalarda matematik öğretmenlerinin, hatalı öğrenci cevaplarına yönelik pedagojik yaklaşımlar incelenmiş ve bu yaklaşımın nasıl geliştirilebileceğine yönelik sonuçlara yer verilmiştir.

Bu çalışmalardan An ve Wu (2012) ödevlerin notlandırılması, kavram yanılgılarının değerlendirilmesi ve analiz edilmesi yoluyla ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrenci düşünmelerini öğrenmelerine odaklanmıştır. Çalışmadan; hataları belirleme, hataların nedenini analiz etme, hataları düzeltmek için yaklaşımlar tasarlama ve hatayı düzeltmek için eyleme geçme şeklindeki sorgulama sürecinde öğrencilerin düşünme bilgilerinde ilerleme kaydedildiği, karşılaşılan zorlukların anlaşıldığı ve matematik öğrenirken pedagoji bilgilerinin geliştirildiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Durkaya *et al*. (2011) çalışmasında lise matematik öğretmenlerinden dizi, türev ve integral konularında çözümleri yanlış verilmiş soruları kullanarak öğretmenlerin hataya yaklaşımlarını incelemiştir. Çalışmadan; yanlış çözümlerin nedenleri belirlenirken ve doğru çözümler gerçekleştirilirken lise matematik öğretmenlerinin zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Chick ve Baker (2005) çalışmasında ortaokul matematik öğretmenlerinin, sayılar konusundaki öğrenci cevaplarına yönelik hataya yaklaşımlarını incelemiştir. Çalışmadan; öğretmenlerin yeniden açıklama, bilişsel çatışma ve öğrenci düşüncelerini irdeleme şeklinde üç farklı hataya yaklaşım stratejilerinden yararlandıkları ayrıca bu stratejileri kullanırken tercih ettikleri yolların birbirinden farklı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Leiß ve Wiegand (2005) ise çalışmasında işbirlikli öğrenme kapsamında yürütülen öğrenci etkinliklerinde öğretmenlerin öğrencilere yönelik müdahale durumlarını incelemiştir. Çalışmadan; öğretmenlerin ders ortamındaki müdahale stratejilerinin üstbilişsel, içeriksel, organizasyonel, duyuşsal ve tanısal olarak farklılaştığı sonucuna ulaşılmıştır.

Kapalı fonksiyonun türevinin mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi bilim dallarındaki uygulamaları göz önüne alındığında, öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevinde öğrenci hatalarına nasıl yaklaşacaklarını belirlemenin önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü kapalı fonksiyonun türevinin analiz alanında önemli bir rol oynadığı yapılan çalışmalardan da açıkça görülmektedir. Speer ve Kung (2016) türev kavramını ve zincir kuralına ilişkin mevcut literatürü desteklemek için kapalı fonksiyonların türevi konusunda yeni araştırmalar yapılması çağrısında bulunmuştur. Lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevindeki öğrenci hatalarına yaklaşımlarında ve hataları gidermede uygulanacak stratejilerde öğretmenlerin öğretimlerini neyin zorlaştırdığı hususunda çok az şey bilinmektedir. Ayrıca lise matematik öğretmenlerinin hataya yaklaşım başarısında hangi anlayışın gerekli olduğu hakkında çok az fikir yürütülmektedir.

Kapalı fonksiyonun türevini çevreleyen konular üzerinde farklı araştırmalar (Borji & Martinez-Planell, 2020; Chu, 2019; Mirin & Zazkis, 2019; Stratton, 2021) yürütülmüş olmasına rağmen öğretmenlerin örtük türevdeki hataya yaklaşımlarının odak noktası olduğu çalışmaların yok denecek kadar az olduğu söylenebilir. Kapalı fonksiyonun türevi konusunun analiz alanında belirli bir konumda yer alması ve konuya ilişkin öğrenci zorlukları, örtük türevin öğretiminde hataya yaklaşımın uygulanmasını gerekli kılmıştır. Dolayısıyla kapalı fonksiyonun türevi özelinde öğretmenlerin hataya yaklaşımlarından elde edilecek sonuçlar çalışmanın literatüre katkısı bakımından kıymetli görülmektedir. Kapalı fonksiyonun türevine yönelik yapılacak bu çalışmanın sonucunda lise matematik öğretmenleri hataya yaklaşım sürecinde kavramsal, işlemsel ve öğretimsel bağlamda yetersiz oldukları durumlarla da yüzleşmiş olacaktır. Bu sayede gelecekte kapalı fonksiyonun türevine yönelik yapılacak çalışmalarda hataya yaklaşım hususunda yaşanabilecek kavramsal, işlemsel ya da öğretimsel zorluklar karşısında önceden önlemler alınabilecektir. Ayrıca yapılacak olan bu çalışmanın sonuçları, hataya yaklaşım ve pedagojik alan bilgisi konuları üzerinde araştırma yapan matematik eğitimcilerine ve bu konulara merak duyan matematik öğretmenlerine ışık tutacaktır. Bu nedenle bu çalışmanın amacı lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevine yönelik hataya yaklaşımlarını araştırmaktır. Bu amaçla aşağıdaki alt problemlere yanıtlar aranmıştır.

1. Lise matematik öğretmenleri kapalı fonksiyonun türevine yönelik öğrenci cevaplarındaki hataları neye dayandırmaktadır?
2. Lise matematik öğretmenleri kapalı fonksiyonun türevine yönelik hatalı öğrenci cevapları karşısında nasıl bir öğretim yaklaşımı sergilemektedir?

2. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseninden, katılımcılardan, veri toplama sürecinden, verilerin analizinden ve araştırmanın geçerliği ile güvenirliğinden bahsedilmiştir.

2.1. Araştırmanın Deseni

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin; kapalı fonksiyonun türevi konusunda öğrencilerin yaptığı hataları, hataların nedenlerini ve bu hatalara önlem alırken sergiledikleri öğretim yaklaşımlarını belirleyebilme durumları ele alınmıştır. Lise matematik öğretmenlerinin hataya yaklaşımları derinlemesine incelendiğinden çalışmada nitel araştırma modellerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Nitel araştırmalar olaylara, normlara ya da değerlere dışarıdan müdahale edilmeksizin kendi koşulları içerisinde detaylı, gerçekçi ve bütüncül bir yaklaşımla incelenen yöntemlerdir (Cropley, 2019; Maxwell, 2012). Durum çalışmaları ise olguları, durumları ya da süreçleri farklı veri toplama araçları ve sınırlı sayıda örneklem ile inceleme fırsatı sunarken, istatistiksel genelleme yapmadan kuramsal önermelerin üretilmesine olanak sağlamaktadır (Brown, 2008; Cohen, Manion & Morrison, 2002).

2.2. Araştırmanın Katılımcıları

2021-2022 öğretim yılı bahar dönemi sonuna doğru gerçekleştirilen bu araştırmanın katılımcıları Karadeniz Bölgesi'nin bir ilinde Millî Eğitim Bakanlığı'na (MEB) bağlı genel liselerde görev yapan 5 matematik öğretmenidir. Çalışmaya katılan öğretmenler belirlenirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Ölçüt örneklemedeki temel anlayış, araştırmacılar tarafından hazırlanan ya da önceden hazırlanmış kıstasları karşılayan durumlarla ya da bireylerle çalışılmasıdır (Patton, 2002). Bu araştırmadaki ölçütlerden birisi öğretmenlerin eğitim fakültesi mezunu olmalarıdır. Araştırmaya katılan öğretmenlerin analiz, matematik öğretimi, özel öğretim yöntemleri, okul deneyimi derslerini almış ve bu dersleri başarıyla geçmiş olmaları örneklem seçiminde etkili olmuştur. Hem alan hem de öğretim dersi deneyimi olan öğretmenlerin hataya yaklaşım kavramına yönelik farklı argümanlar geliştirebilecekleri düşünülmüştür. Matematik öğretmenlerinin 12.sınıf düzeyinde kapalı fonksiyonun türevine yönelik ders deneyimi yaşamış olmaları da araştırma ölçütleri arasındadır. Kapalı fonksiyonun türevi konusu hali hazırda lise matematik öğretim programında yer almamasına rağmen lise son sınıf düzeyinde bu konunun öğretimi örtük olarak yapılmaktadır.

Araştırmada dikkate alınan diğer bir ölçüt ise öğretmenlerin mesleki deneyim süreleridir. Buna göre araştırmaya katılacak öğretmenlerin en az 15 yıllık bir öğretmenlik deneyimine sahip olmalarına dikkat edilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerden mesleki deneyimi en az olan öğretmen 15 yıllık, deneyimi en fazla olan öğretmen ise 19 yıllık bir tecrübeye sahiptir.

Kutsal kabul edilen öğretmenlik mesleğinin hangi döneminde olursa olsun bu mesleği yaşayan öğretmenlerin tamamı, matematik dersinin öğretimi sürecindeki emeklerinden dolayı değerlidir. Ancak eğitim literatüründe öğretmenler üzerinde araştırmalar yapılırken çalışmanın amacına göre bazen azami düzeyde katkının alınması hedeflenebilmektedir. Bu nedenle eğitim literatüründe kalıplaşmış bazı parametreler ve araştırma sonuçları dikkate alınarak hareket edilebilmektedir. Buna göre literatür incelendiğinde Berliner (2001) bir öğreticinin deneyimli kabul edilebilmesi için öğretmenlik tecrübesinin en az beş yıl ya da beş yıldan fazla olması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Martin, Yin ve Mayall (2006) hizmet süresi beş yıla kadarki öğretmenleri deneyimsiz olarak nitelendirirken mesleğinde beş yılını doldurmuş öğretmenleri deneyimli öğretmenler şeklinde kategorize etmektedir. Derste öğrenci düşüncelerine yanıt verirken özellikle deneyimsiz öğretmenlerin deneyimli öğretmenlere nispeten daha çok zorlandıkları (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010; Levin & Richards, 2010), deneyimli öğretmenlerin konuya dönük pedagojik alan bilgilerinin deneyimsiz öğretmenlere oranla daha güçlü olduğu (Davidowitz & Potgieter, 2016) şeklinde literatürde farklı araştırma sonuçları mevcuttur. Ayrıca De Jong ve Van Driel (2004) öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin gelişimi için mesleki deneyime ve öğrenci zorluklarına yönelik farkındalığa sahip olmalarının önemine dikkat çekmiştir. Tüm bu nedenlerden dolayı araştırmaya katılan öğretmenler belirlenirken mesleki deneyim faktörü araştırmacılar tarafından bir ölçüt kabul edilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin gerçek kimliklerini gizlemek amacıyla öğretmenlere $Ö_1$, $Ö_2$, …$Ö_5$ şeklinde kodlar verilmiştir. Ayrıca öğretmenlere araştırma öncesinde birinci araştırmacı tarafından hataya yaklaşım kavramına yönelik bir ders süresi boyunca bilgi verilmiştir.

2.3. Veri Toplama Süreci

Bu araştırmanın veri toplama süreci iki aşamadan oluşmaktadır. Sürecin birinci aşamasında lise son sınıf öğrencilerine kapalı fonksiyonun türevi konusunda açık uçlu soruların sorulması planlanmıştır. Sürecin ikinci aşamasında ise açık uçlu sorulara verilen öğrenci cevapları arasından yanlış olanların seçilmesi ve seçilen hatalı cevaplara yönelik lise matematik öğretmenlerinin yaklaşımlarının belirlenmesi planlanmıştır. Buna göre ilk önce literatürde kapalı fonksiyonun türevi konusunda gerçekleştirilen araştırmalarda kullanılan açık uçlu soru örnekleri (Borji & Martinez-Planell, 2019; 2020; Heo, 2019; Jeppson, 2019; Kandeel, 2021; Mirin & Zazkis, 2019) incelenmiştir. Daha sonra araştırmacıların ortak görüşü doğrultusunda açık uçlu soru örneklerinden 8 tanesinin lise öğrencilerine uygulanmak üzere kullanılmasına karar verilmiştir. Uygulama öncesi okul idaresi ve dersin öğretmeni tarafından sözlü izin alınmıştır. Öğrencilerin öğrenme düzeyine uygun olarak hazırlanan sorular, 2021-2022 öğretim yılı bahar döneminin başında MEB'e bağlı bir devlet lisesinin son sınıfında öğrenim gören 32 öğrenciye uygulanmıştır. Açık uçlu sorulara verilen cevaplar birinci araştırmacı gözetiminde, bir ders saatinde ve yazılı olarak alınmıştır. Sonra öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların tamamı detaylı şekilde araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

Öğrenci cevaplarında ortaya çıkan hatalar tespit edildikten sonra bu hatalara yönelik bir havuz oluşturulmuştur. Havuzda yer alan hatalı cevaplar arasından 3'ünün öğretmenlere yapılacak uygulamada kullanılması kararlaştırılmıştır. Hatalı cevapların açık şekilde olması ve birbirine benzer şekilde aynı türden olmaması bu cevapların nihai uygulamada kullanılması noktasında ön plana çıkmasını sağlamıştır. 3 hatalı cevap, soru kökleri de kullanılıp araştırmacılar tarafından senaryolaştırıldıktan sonra nihai uygulama öncesinde kontrol amaçlı 2 uzmana inceletilmiştir. Uzmanlardan birisi hataya yaklaşım konusunda akademik çalışmalar yapan, bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde görev yapan doktoralı bir matematik eğitimcisidir. Diğer uzman ise MEB'e bağlı bir devlet lisesinde görev yapan, matematik eğitimi alanında lisansüstü dereceye ve pedagojik yeterliğe sahip deneyimli bir lise matematik öğretmenidir. Uzmanlar hatalı senaryoları kavramsal açıdan değerlendirdikten sonra senaryoların nihai uygulamada kullanılabileceği tavsiyesinde bulunmuştur.

Hata temelli üç senaryoda da kapalı fonksiyonun türevine yönelik işlemler uygulanmıştır. Senaryoların birincisinde (Ek-1'de) bağımsız *x* ve bağımlı *y* değişkenlerinin birbirine oranlarının toplamı kullanılarak bir eşitlik oluşturulmuştur. Bu eşitlikte örtük *y* fonksiyonunun türevi aranmıştır. Paydalar eşitlendikten sonra işlemler yapılıp örtük türev aramanın geciktirilerek sona bırakılması prosedür önceliği bakımından tercih edilmemektedir. Öğrenci *y*'yi *x*'in türevlenebilir bir fonksiyonu düşünerek işlemleri kavramsal bağlama uygun şekilde yapmaya çalışmıştır. Ancak öğrenci çözüm yaptıktan sonra çözümün kapalı fonksiyon için sağlayıp sağlamadığını kontrol etmemiştir. Nitekim hatalı çözümün yer aldığı ifadede örtük türev sonucu kısmi türevle $y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x-2y}{2y-3x}$ şeklinde teyit edilmiştir. Bulunan bu çözümde paydadaki $F_y \neq 0$ olmamaktadır. $F_y = 2y - 3x$ ifadesinde $F_y = 2y - 3x = 0$ ve $y = \frac{3}{2}x$ eğrisi boyunca $F_y \neq 0$ olmamaktadır. Sonsuz noktada $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ türevi bağımlı değişkene göre jakobiyen $F_y = 0$ olduğundan sonuç yanlış çıkmaktadır. Yine aynı çözümde kök incelendiğinde tanım kümesine karşılık görüntü kümesinde iki farklı değer ortaya çıkmaktadır. Bu durumda çözümün kapalı fonksiyon için sağlamadığı da teyit edilebilmektedir. Bahsedilen duruma yönelik işlemler aşağıda detaylıca gösterilmiştir.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3$$

$$\frac{x.x}{y.x}+\frac{y.y}{x.y}=3$$

$\frac{x^2+y^2}{xy}=3$ ve $x^2+y^2=3xy$ olduğundan $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ eşitliği kullanılarak

$$x^2+y^2=3xy$$

$$(x-y)^2+2xy=3xy$$

$$(x-y)^2=3xy-2xy=xy$$

$(x-y)^2=xy$ eşitliğinde $x=p$ için

$(p-y)^2=py$ ve $y^2-2py+p^2=py$ yazılır. Denklem düzenlenip kökler arandığında

$y^2-2py-py+p^2=0$ ve $y^2-3py+p^2=0$

$\Delta=b^2-4ac$ ve $\Delta=(-3p)^2-4.1.p^2 = 9p^2-4p^2=5p^2$ bulunur. Burada kökler y_1 ve y_2

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3p)+\sqrt{5p^2}}{2.1}=\frac{3p+\sqrt{5}.p}{2}$$

$$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3p)-\sqrt{5p^2}}{2.1}=\frac{3p-\sqrt{5}.p}{2}$$

Yukarıda görüldüğü üzere yapılan işlemler sonucunda tanım kümesine karşılık iki değer ile karşılaşıldığından çözümün hatalı olduğu söylenebilir. Öte yandan Ek-4'te bu senaryo için doğru yürütülmüş bir çözüme de yer verilmiştir. Ek-4'teki çözümde paydalar eşitlenmeden daha ilk işlemden başlanarak örtük türev aranmıştır. İşlemlerde *y*, *x*'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak düşünülerek y' kapalı fonksiyonun türevi bulunmuştur. Yapılan çözümde öğrenci çözümün kapalı fonksiyon için sağlayıp sağlamadığını teyit etmemiş olsa bile ifade (0,0) noktası dışındaki diğer tüm noktalarda kapalı fonksiyona yönelik denklemin çözüm kümesini oluşturulabilmektedir. Bu nedenle yapılan çözüm doğru kabul edilebilir.

Senaryoların ikincisinde (Ek-2'de) iç içe sonsuz kökler kullanılarak oluşturulmuş bir eşitlik vardır. Bu eşitlikte de bir önceki hata temelli senaryoda olduğu gibi örtük *y* fonksiyonunun türevi aranmıştır. Senaryoda *y*'nin *x*'e göre değişmesi, *y*'nin *x*'e bağlı olması ve *x*'in türevlenebilir bir fonksiyonu gibi davranması durumları ihmal edildiğinden belirli bir noktadan sonra yapılan işlemlerin hatalı yürütüldüğü, dolayısıyla sonucun yanlış bulunduğu düşünülmektedir. İkinci hata senaryosundaki hatayı giderebilmek için *x*'e göre türev operatörünün $\frac{d}{dx}$ kullanılması önerilmektedir. Bu sayede hangi değişkenler nezdinde türevin nasıl aranması gerektiği hususunda $\frac{d}{dx}$ operatörünün öğrenciye ipucu vereceği düşünülmektedir. Operatör yardımıyla türev ararken zincir kuralını kullanmak, bu senaryoda sonucun doğruluğu için tavsiye edilen bir diğer ipucudur. Nitekim senaryoda $\frac{d(y^2)}{dx}$ notasyonuyla karşılaşıldığından ve y^2'nin *x*'e bağlı türevi ilk planda elde edilemeyeceğinden $\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ zincir kuralı uygulanarak sonuca daha sağlıklı bir şekilde varılabilir. Türev operatörü ve zincir kuralı gibi ipuçları dışında kısmi türevler yardımıyla da doğru sonuç elde edilebilir. Ek-2'deki hatalı senaryoya dönük doğru çözümün olduğu bir örnek Ek-5'te verilmiştir. Ek-5'teki çözümde öğrencinin türev operatörü kullandığı ve sıkıştığı noktada zincir kuralından yararlandığı görülmektedir. Öğrenci, kısmi türevler yardımıyla sonuca ulaşmayı tercih etmemesine rağmen işlemleri dikkatli, doğru ve yerinde uygulayarak örtük türevin sonucuna ulaşmıştır. Aşağıda Ek-5'teki çözüme alternatif olarak kısmi türev yardımıyla doğru sonuca ulaşılmasını sağlayan farklı bir çözüme yer verilmiştir.

$\sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{x + \cdots}}}} = x$ olduğuna göre $\sqrt{y + \sqrt{x + x}} = x$ yazılabilir.

$\sqrt{y + \sqrt{x + x}} = x$ ve $\sqrt{y + \sqrt{2x}} = x$ den her tarafın karesini alalım.

$(\sqrt{y + \sqrt{2x}})^2 = (x)^2$ den $y + \sqrt{2x} = x^2$ yazılır. $\sqrt{2x}$ ifadesi yalnız bırakıldığında

$\sqrt{2x} = x^2 - y$ bulunur. Her tarafın karesini aldığımızda $(\sqrt{2x})^2 = (x^2 - y)^2$

$2x = x^4 - 2.x^2.y + y^2$ eşitliği yazılır. Buradan $x^4 - 2.x^2.y + y^2 - 2x = 0$ yazılabilir.

$F(x,y) = x^4 - 2.x^2.y + y^2 - 2x = 0$ şeklinde düşünerek $\frac{dy}{dx}$'i bulabiliriz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x^3 - 2y.2x - 2}{-2x^2 + 2y} = -\frac{4x^3 - 4xy - 2}{-2x^2 + 2y} = -\frac{2.(2x^3 - 2xy - 1)}{2.(-x^2 + y)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(2x^3 - 2xy - 1)}{(-x^2 + y)} = \frac{2x^3 - 2xy - 1}{x^2 - y}$$

Yukarıda görüldüğü üzere doğru çözüme alternatif olarak işlem yolu belirli bir aşamaya kadar Ek-5'teki çözüm ile aynı devam eden ve daha sonra kısmi türevler yardımıyla sonuca ulaşılmasını sağlayan yeni bir çözümün yapıldığı görülmektedir. Çözüm sürecindeki belirli aşamalarda ifadelerin karelerini alma işleminin gerçekleştirilmesinin ardından eşitlikteki tüm cebirsel ifadeler tek bir tarafta toplanıp eşitlik $F(x, y) = 0$ formatına dönüştürülmüştür. Daha sonra kısmi türev arama işlemine geçilerek sonuca ulaşılmaktadır. Öte yandan senaryoların üçüncüsünde (Ek-3'te) ise kapalı olarak verilen bileşke fonksiyona yönelik türev arama işleminin yapılması beklenmektedir. Aslında bu senaryoda da diğer senaryolardaki gibi örtük türev arama işlemi söz konusudur. Senaryoda öğrencinin örtük olarak verilen bileşke fonksiyonun türevini ilk ararken doğru notasyonlar kullandığı söylenebilir. Ancak daha sonra öğrencinin fonksiyonlar arasındaki dönüşümler ile zincir kuralını dikkate almayarak hatalı bir çözüm sergilediği ve sonucu yanlış tayin ettiği düşünülmektedir. Ek-3'teki senaryoda yer alan soruda öğrenci $u = g(x)$ ve $y = f(u)$ dönüşümleri ile $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ zincir kuralı uygulamalarını kullansaydı veya bu dönüşümlerin nasıl yapıldığını dikkate alıp kendi çözümündeki verileri, incelediği zincir kuralı örneğindeki formüle benzer şekilde uygulasaydı belki de çözümün sonunda $\frac{d(f(g(x)))}{dx}$ notasyonu yerine $\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}$ türev operatörünü kullanıp doğru sonuca ulaşabilecekti. Burada *f* fonksiyounun *u*'ya, *u*'nun *g* fonksiyonuna, *g* fonksiyonunun da *x*'e bağlı olarak hareket ettiğine dair bir ok ya da ağaç diyagramının kullanılması, sorunun çözümünün doğru yapılmasına yardımcı olabilir. Ek-3'teki hatalı senaryoya dönük doğru çözümün yapıldığı bir örnek Ek-6'da verilmiştir. Matematik öğretmenlerine yönelik hata temelli senaryolar öğrencilere yapılan uygulamanın devamında aynı öğretim yılının aynı döneminin sonuna doğru yürütülmüştür. Öğretmenlerin senaryolara yönelik cevapları bire bir görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Öğretmenlerden senaryolardaki soru çözümlerinde varsa hataları belirlemeleri ve bu hataların kaynağını gerekçeleriyle birlikte açıklamaları istenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmenlerden tespit ettikleri hataları gidermeye yönelik sergileyecekleri farklı öğretim yaklaşımları ile birlikte uygulayacakları stratejileri de açıklamaları beklenmiştir. Son olarak yanlış çözüm yapıldığı düşünülen senaryolarda öğretmenlerden kendi doğru çözümlerini ortaya koymaları talep edilmiştir. Öğretmenlerle yapılan hata temelli senaryo uygulamalarında süre sınırlamasına gidilmemiştir. Yürütülecek olan hata temelli aktiviteler öncesinde ilgili kurumun okul idaresinden ve öğretmenlerinden sözlü izinler alınmıştır. Öğretmenlerin hata temelli senaryoları ortalama bir ders saatine yakın bir sürede tamamladıkları söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı senaryolardaki tüm durumlara yönelik görüş belirtmiştir.

2.4. Veri Analizi

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin örtük türev senaryolarındaki hataların tespiti ve nedenlerine yönelik cevapları ile bu hataları gidermek için sergileyecekleri farklı öğretim yaklaşımlarına yönelik cevapları iki ayrı tema olarak işlenmiştir. Veri analizi işlemi de bu doğrultuda yürütülmüştür.

Matematik öğretmenlerinin, hataların belirlenmesi ve kaynağının tespitine yönelik cevaplarının analizinde gömülü desen içerisinde tanımlanan açık kodlamadan yararlanılmıştır (Merriam & Grenier, 2019; Mills, Bonner & Francis, 2006). Açık kodlama, yeni toplanmış verilerin üzerinden ilk geçişte gerçekleştirilen bir kodlama çeşidi olup kavramsal benzerliğe sahip durumların kategori ve alt kategori şeklinde bir araya getirilerek gruplandırılmasını sağlar (Neuman, 2014). Çalışmada öncelikle birinci araştırmacı öğretmenlerin cevaplarını anlamlı bölümlere ayırarak taslak kategoriler ve kodlar altında tanımlanmıştır. Cevaplar, aynı araştırmacı tarafından tekrarlı şekilde okunarak kategori ve kod oluşturma sürecinin sürekli güncellenmesi sağlanmıştır (Silverman, 2013). Aralarındaki benzerlikler ve farklılıklar incelendikten sonra kodlar ana kategoriler haline dönüştürülmüştür. Böylece kodlar ve kategoriler veri analizi sürecinde ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmada birinci araştırmacı tarafından diğer araştırmacıdan bağımsız şekilde oluşturulan kategori ve kodlar, ikinci araştırmacı tarafından daha sonra oluşturulan kategori ve kodlarla karşılaştırılmıştır. Araştırmacılar arasında kategori ve kodlar üzerinde uyuşum sağlandıktan sonra matematik eğitimi alanında lisansüstü dereceye ve pedagojik yeterliğe sahip bir lise matematik öğretmeni ile bilimsel araştırma yöntemleri konusunda çalışmalarda bulunmuş doktora derecesine sahip bir eğitimciye kategoriler-kodlar teyit ettirilmiştir. Araştırmada örtük türevdeki hatalarla ve bu hataların kaynağıyla ilişkili olmadığı düşünülen veya bir anlam verilemeyen kategoriler-kodlar araştırma dışında tutulmuştur. Araştırmacılar arasındaki kodlama uyuşum yüzdesi Miles ve Huberman'ın (1994) güvenirliği hesaplama formülüne göre .95 bulunmuştur. Sonuç olarak araştırmanın ilk temasında oluşan kategori listesinin "Toplamın türevinden yararlanarak çözüme başlamama, uygun türev operatörlerinden ve diferansiyelden yararlanmama, kısmi türevi kullanmama, bileşke fonksiyonun türevini uygulamama, değişkenlerin rollerinin farkında olmama, zincir kuralını anlamama" şeklinde olmasına karar verilmiştir.

Matematik öğretmenlerinin, öğrenci hatalarını gidermeye yönelik sergileyecekleri farklı öğretim yaklaşımlarıyla ilgili cevapları betimsel analiz yardımıyla incelenmiştir. Betimsel analizde nitel veriler açık, şeffaf ve sistemli bir şekilde betimlenerek neden-sonuç ilişkisi bağlamında yorumlanır ve sonuçlar temalar bakımından anlamlandırılarak geleceğe yönelik çıkarımlarda bulunulur (Berg, 2001). Çalışmada öncelikle öğrenci hatalarını gidermek için öğretmenler tarafından üretilen farklı öğretim müdahalelerine yönelik kategorilerin ve kodların belirlenmesinde literatürdeki araştırmalardan (Chick & Baker, 2005; Didiş-Kabar & Amaç, 2018; Son, 2013; Son & Sinclair, 2010) faydalanılmıştır. Bu sayede matematik öğretmenlerinin, hatanın giderilmesine yönelik sergileyecekleri farklı öğretim yaklaşımlarını sınıflandıran tematik bir çerçeve oluşturulmuştur. İçerisinde kategorilerin, kodların ve davranışların yer aldığı tematik çerçeve Ek-7'de verilmiştir. Buna göre çalışmada son durumda oluşan kategori listesi "doğruyu açıklama, yanlışı gösterme, konuyu / kavramı yeniden öğretme, öğrencinin yanlışını veya doğru çözümü fark ettirme, öğrenci düşüncesini anlama veya öğrenci düşüncesini ileri taşıma" şeklindedir. Kategorilere yönelik tematik çerçeve oluşturulurken kategorilerin ortak davranışlar içermemesine ve birbirleriyle örtüşecek biçimde bağımlı bir yapıda olmamasına dikkat edilmiştir. Araştırmacılar, kodların kapsamını önceden belirlenen kategorilerle ilişkilendirmek için birbirinden bağımsız şekilde kodlamalarda bulunmuştur. Birbirleriyle karşılaştırılan kodlamalarda ortaya çıkan farklılıklar üzerinde tartışılmıştır. Kodlamalar üzerindeki farklılıklar giderilip ortak bir görüş birliğine varıldıktan sonra veriler, konu üzerindeki deneyimi daha fazla ve kodlama mutabakatı lehine olan (Campbell, Quincy, Osserman & Pedersen, 2013) araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Matematik öğretmenlerinin, hatanın giderilmesi bağlamındaki öğretim yaklaşımlarıyla ilgili cevapları, araştırmanın ikinci teması için önceden belirlenen kategorilerin altında sınıflandırılmıştır (Creswell & Poth, 2016). Öğretmenlerden gelen cevaplar, analiz edildikten sonra tablolar halinde okuyucuya sunularak doğrudan alıntılarla (Miles & Huberman, 1994) desteklenmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgular hem kendi arasında hem de literatürle tartışılarak açıklanmıştır.

2.5. Geçerlik ve Güvenirlik

Araştırmanın geçerliğini arttırmak amacıyla amaçlı örnekleme yönteminden yararlanılmıştır. Bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinin matematik eğitimi dalında görev yapan bir öğretim üyesi, araştırmayı giriş bölümünden sonuç bölümüne kadar tarafsız şekilde değerlendirmiştir.

Araştırmada bulguların yorumlanması ve raporlanması objektif bir şekilde yürütülmüştür. Hata temelli senaryolar üzerine görüşmeler yapılan öğretmenlerin herhangi bir baskı olmadan kendi istekleriyle çalışmaya katılmaları yönünde hareket edilmiştir. Araştırmaya katılacak öğretmenlere çalışma öncesinde görev yerlerinin ve gerçek kimliklerinin gizli tutulacağı hususunda teminat verilmiştir. Hata temelli senaryolardaki sorularda hataya yaklaşım kavramına yönelik kuramsal yapının sınırları içinde kalınmasına gayret gösterilmiştir.

Öğretmenlerle hata temelli senaryolar üzerinde yapılan görüşmelerde rahat ve doğru cevap verebilmeleri için süre sınırlamasına gidilmemiştir. Öğretmenlerle görüşmeler gerçekleştirilirken veri kaybını önlemek için ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Kayıt cihazının kullanılması noktasında öğretmenlerin onayı alınmıştır. Görüşme sonrasında ses kayıt cihazı yardımıyla elde edilen veriler transkript edilerek birinci araştırmacı tarafından yazılı hale getirilmiştir. Görüşmeler, verimli geçmesi adına matematik zümre odası gibi sessiz bir ortamda ve ders saatleri dışında yapılmıştır. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden sonra transkript edilen veriler öğretmenlerin teyidine sunulmuştur. Araştırma sonunda yapılan görüşmelerde öğretmenlerden, çalışmanın aksayan yönleri, yaşanan zorluklar ve tavsiyeler üzerine dönütler alınmıştır. Veri analizi yapılırken kategoriler ve kodların belirlenmesi sürecinde uzman görüşlerine başvurulmuştur. Ayrıca araştırma ayrıntılı şekilde betimlenmiştir. Bu sayede araştırmada örneklem seçimi, akran değerlendirmesi, denetim izi, gönüllülük, inandırıcılık, katılımcı teyidi, uzman değerlendirmesi ve ayrıntılı betimleme gibi geçerliği arttırıcı önlemler uygulanmıştır (Bogdan & Biklen, 2007; Brinberg & McGraft, 1985; Lincoln & Guba, 1985).

Araştırmanın güvenirliğini arttırmak amacıyla öğretmenlerle yapılan görüşmelerin analizinden elde edilen kategoriler ve kodlar farklı araştırmacılar tarafından kodlanmıştır. Yapılan kodlamalar karşılaştırılarak uyuşum yüzdesi hesaplanmıştır. Araştırmada öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere yönelik alıntılara yeterince yer verilmeye çalışılmıştır. Araştırma deseninin araştırılan konuya uygun olmasına dikkat edilmiştir. Bu araştırmadan elde edilen bulguların, literatürdeki araştırmaların sonuçlarıyla örtüşüp örtüşmediği çalışmada tartışılmıştır. Araştırmadan elde edilen bulguların gelecekte tekrar incelenmesi ihtimaline karşı veriler birinci araştırmacı tarafından muhafaza altına alınmıştır. Bu sayede araştırmada tutarlılık, teyit edilebilirlik, desen seçimi, literatürle kıyaslama gibi güvenirliği arttırıcı önlemler uygulanmıştır (Borman, Le Compte & Goetz, 1986; McMillan & Schumacher, 2010; Morrow, 2005; Morse, 1994).

3. BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde lise matematik öğretmenlerinin hata temelli senaryolardaki öğrenci hatalarının tespiti ile bu hataların dayandırıldığı gerekçelere (i) ve öğrenci hataları karşısında öğretmenlerin sergiledikleri öğretim yaklaşımlarına (ii) yönelik bulgulara yer verilmiştir.

3.1. Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Hatalarında Dayandırdıkları Gerekçeler

Hata temelli senaryolara verilen öğretmen cevapları incelendiğinde lise matematik öğretmenleri; toplamın türevinden yararlanılarak çözüme başlamama, $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ gibi türev operatörleriyle *dx* ve *dy* gibi diferansiyel notasyonlarından yararlanmama, kısmi türev kuralını kullanmama, örtük verilen ifadelerde bileşke fonksiyonun türevini uygulamama, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkilerin farkında olmama ve son olarak zincir kuralını anlamama gibi durumları öğrenci hatalarına dayanak göstermiştir. Tablo 1'de öğretmenlerin öğrenci hatalarını dayandırdıkları gerekçeler gösterilmiştir.

Tablo 1. Lise Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Hatalarını Dayandırdıkları Gerekçeler

Gerekçe	HTS_1	HTS_2	HTS_3
Toplamın türevinden yararlanarak çözüme başlamama	$Ö_2$ $Ö_3$ $Ö_5$		
Uygun türev operatörlerinden ve diferansiyelden yararlanmama		$Ö_4$	$Ö_4$
Kısmi türevi kullanmama	$Ö_1$ $Ö_4$	$Ö_1$ $Ö_4$ $Ö_5$	
Bileşke fonksiyonun türevini uygulamama		$Ö_2$	
Değişkenlerin rollerinin farkında olmama		$Ö_1$ $Ö_3$ $Ö_4$ $Ö_5$	
Zincir kuralını anlamama			$Ö_1$ $Ö_2$ $Ö_3$ $Ö_4$ $Ö_5$

HTS: Hata Temelli Senaryo

Tablo 1'e göre HTS'lerdeki hatalar bütün olarak değerlendirildiğinde her bir öğretmenin toplamda en az iki farklı gerekçe ürettiği görülmektedir. Ayrıca öğretmenlerin tamamının hiç gerekçe belirtmedikleri HTS'lerin bulunmadığı söylenebilir. Her bir HTS'de öğretmenler genelinde en az iki farklı hata gerekçesine hem yer verildiği hem de değinilmediği göze çarpmaktadır. Bu durum HTS'lerdeki hata gerekçelerinin farklı nitelikte olmalarından kaynaklanmaktadır. Nitekim öğretmenler HTS'lerdeki hataların niteliğine göre farklı gerekçeler üzerinde kümeleşmiştir. HTS_2 öğretmenlerin en fazla farklı gerekçe ürettikleri senaryo olmuştur. HTS'lerdeki hatalara en çok farklı gerekçeler üreten öğretmenler ise $Ö_4$ ve $Ö_5$'tir. Buna göre öğretmenler HTS_1'de toplamın türevinden yararlanarak çözüme başlamama gerekçesinde, HTS_2'de değişkenlerin rollerinin farkında olmama gerekçesinde, HTS_3'te ise zincir kuralını anlamama gerekçesinde yoğunlaşmıştır. Aşağıda HTS_1'deki farklı hata gerekçelerinden örnek alıntılara yer verilmiştir.

"Öğrenci yaptığı çözümde ifadeyi bir bütün olarak değerlendirmiş. Türev alma işleminde acele etmemiş ama sonuçta kapalı ifadenin türevini alırken kurallara uygun davranmış gibi görünüyor. Ancak şu noktada hata yapmış olma ihtimali yüksek. Öğrenci $\frac{x}{y}$ *ve* $\frac{y}{x}$ *rasyonel ifadelerini ayrı fonksiyonlar gibi düşünmeyerek* $f'(x) + g'(x)$ *toplam türevini almadan çözüme başlamış. Belki toplamın türevini alarak işleme başlasa sonuç doğru çıkabilirdi. O yüzden hatasının nedenini toplamın türevinden yararlanmamasına bağlıyorum." (*$Ö_3$ *-* HTS_1*)*

"Öğrencinin çözüm odaklı yaptığı işlemlerde bir sorun görünmüyor gibi. Öğrenci burada direkt payda eşitleyerek x ve y leri bir düzene sokmaya çalışmış, sonra genel türevi alarak y' *ifadesini yalnız bırakmış. Ancak bulunan sonuçta hata olabileceğini düşündüğüm bir şeyden dolayı dikkatimi ona odakladım. Rasyonel oranlar olarak verilen ifadelerde herhangi bir payda eşitlemesi yapmadan türev alınabilir mi? Evet alınabilir. Mesela x'e göre türev alınırken y'nin bir sabit terim gibi düşünüleceğini öğrenci bilir sanırım. O zaman öğrenci burada kısmi türevlerden yararlanarak türev alabilirdi. Kısmi türev alınca sonuç farklı çıkıyor o dikkatimi çekmişti. İşte bu işlemdeki hatanın nedenini öğrencinin kısmi türevi kullanmaması, bu türevi ihmal etmesi olarak görüyorum. Bence öğrencinin kısmi türevlerden yararlanarak işlem yapmaması hatalı sonuç bulmasına neden olmuş gibi duruyor." (*$Ö_1$ *-* HTS_1*)*

HTS_1'deki gerekçeler incelendiğinde öğretmen cevaplarının; toplamın türevinden yararlanarak çözüme başlamama ve kısmi türevi kullanmama gerekçeleri üzerinde kümeleştikleri görülmektedir. Öğretmenlerin bir bölümü ($Ö_2$ $Ö_3$ $Ö_5$) öğrenci hatasını; fonksiyonların toplamının türevini aramaya başlamamayla ilişkilendirirken diğer bir bölümü ($Ö_1$ $Ö_4$) ise kısmi türev formülünü kullanmamayla ilişkilendirmektedir. Ancak öğretmenlerin tümümün HTS_1'deki hatanın gerekçesini tam olarak doğru belirleyemediği söylenebilir. Bu durum senaryodaki hatanın zor olmasıyla açıklanabilir. HTS_1'de tüm öğretmenlerin sadece bir hata gerekçesiyle cevap verdikleri gözlenmiştir. Aşağıda HTS$_2$'de farklı hata gerekçelerinden örnek alıntılara yer verilmiştir.

"Öğrenci $x^2 = y + \sqrt{2x}$ eşitliğinde $\sqrt{2x}$ ifadesini olduğu gibi eşitliğin diğer tarafına atarak türevi rahatlıkla alabilirdi. Öyle yapmayarak işi uzatmış görünüyor. Ancak ben burada yapılan hatanın nedenini öğrencinin $\frac{d}{dx}$ ve $\frac{d}{dy}$ türev operatörleri ile dx ve dy diferansiyellerini kullanmamasında buluyorum." (Ö$_4$ - HTS$_2$)

"Öğrenci öncelikle her iki tarafın türevini almış. Oradan y'yi çekerek bir fonksiyon elde etmiş. İşlemler $F(x, y) = 0$ haline dönüştürülen yere kadar doğru yapılmış. Daha sonra türev alındığı görülüyor. Her iki tarafın x'e göre türevi alınmış ama o geçişte y sabit bir terim gibi düşünülmüş. Demek ki öğrenci burada x ile y arasındaki ilişkiyi iyi bilmiyor. Burada öğrencinin y'yi x'e bağlı bir fonksiyon olarak düşünmemesi yapılan hatanın nedeni bence. Hadi diyelim ki y sabit gibi düşünülecek. O zaman öğrencinin kısmi türevi kullanması gerekirdi. Öğrencinin ifadeyi $F(x, y) = 0$ şekline dönüştürdükten sonra kısmi türev almaması da hata yapmasına neden olan ayrı bir faktör. Bir şey daha gördüm bu işlemlerde. Öğrenci kapalı fonksiyonun türevini bilmediği gibi çarpımın türevini de net uygulayamamış. Yani burada öğrenci hem kapalı fonksiyonun ve çarpımın türevini bilmiyor hem de y'nin x'e bağlı olduğunu ve kısmi türevi dikkate almıyor. Bunların hepsi hata yapmasının altındaki gerekçeler." (Ö$_5$ - HTS$_2$)

"Bu öğrencinin kapalı fonksiyonun türevini bilmediği o kadar çok bariz ki. Öğrenci burada bir kere bileşke fonksiyonunun türevinin nasıl alındığını bilmiyor. Bu durum onu hata yapmaya sürüklemiş. Eğer ki bileşke fonksiyonun türevini bilse x'e bağlı olan y değişkenine yönelik doğru türev alma işlemi gerçekleştirirdi." (Ö$_2$ - HTS$_2$)

HTS$_2$'deki gerekçeler incelendiğinde öğretmen cevaplarının dört farklı hata gerekçesine dayandırıldığı söylenebilir. Bu gerekçeler; değişkenlerin rollerinin farkında olmama (Ö$_1$ Ö$_3$ Ö$_4$ Ö$_5$), kısmi türevi kullanmama (Ö$_1$ Ö$_4$ Ö$_5$), bileşke fonksiyonun türevini uygulamama (Ö$_2$) ve uygun türev operatörlerinden ve diferansiyelden yararlanmama (Ö$_4$) şeklindedir. Öğrencinin değişkenler arasındaki ilişkiyi bilmediğini düşünen çoğu öğretmen, öğrencinin kısmi türevi ihmal ettiği yönünde de görüş belirtmiştir. Buna göre ilgili iki gerekçenin aynı hatadan beslenen ve birbirleriyle ilişkili gerekçeler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin tümünün HTS$_2$'de öne sürdükleri gerekçelerin bu hatanın kaynağıyla uyuşan gerekçeler oldukları ifade edilebilir. Bu durum senaryodaki hatanın kolay olmasıyla açıklanabilir. HTS$_2$'de öğretmenlerden Ö$_1$, Ö$_4$ ve Ö$_5$'in birden fazla gerekçe ürettiği görülmektedir. Aşağıda HTS$_3$'deki hata gerekçelerinden bir örnek alıntıya yer verilmiştir.

"Öğrencinin cevabını inceliyorum da bileşke fonksiyonun türevini doğru yapılandırmış ama devamında işlemlerinde hatalar görüyorum. Öğrenci, işlemlerin sonunda bileşke fonksiyonun türevini yüzde yüz hatalı göstermiş. Bu soruda yapılan hatanın iki sebebinin olduğunu düşünüyorum. Birincisi, öğrenci türev operatörünün ne olduğunu tam özümseyememiş. Öğrencinin türev operatörünü tam olarak uygulayamadığı söylenebilir. Operatörün hangi kavramın türevini al demek olduğunu veya hangi değişkenin hangi değişkene göre türevinin alınması gerektiğini gösteren notasyonun nasıl yazılması gerektiğini bilmiyor. Bu soruda yapılan ikinci hatanın sebebi ise öğrencinin zincir kuralını tam olarak öğrenememiş olmasıdır. Bir yandan şu durumlar da geliyor aklıma. Öğrenci belki dikkatsiz davranmış olabilir, uygun notasyonları yazmak öğrencinin gözünden kaçmış da olabilir diyeceğim ama öğrencinin cevabını o anda nasıl verdiğine ve cevabının gerekçesini nasıl açıkladığına dair bir done yok elimizde. Sadece yazılı cevap vermiş. Ancak öğrencinin türev operatörünü yazarken ürettiği hata, zincir kuralı formülünü yanlış yazmasına da neden olmuş diyebilirim." ($Ö_4$-HTS_3)

HTS_3'teki gerekçeler incelendiğinde öğretmen cevaplarının iki farklı hata gerekçesine dayandırıldığı söylenebilir. Bu gerekçeler; uygun türev operatörlerinden ve diferansiyelden yararlanmama ($Ö_4$) ile zincir kuralını anlamama ($Ö_1$ $Ö_2$ $Ö_3$ $Ö_4$ $Ö_5$) şeklindedir. HTS_3'te $Ö_4$ dışındaki tüm öğretmenlerin sadece bir hata gerekçesiyle cevap verdikleri gözlenmiştir. Öğretmenlerin tümünün ortak görüş olarak zincir kuralını anlamama gerekçesi üzerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Ancak öğretmenlerden sadece $Ö_4$ zincir kuralını anlamama gerekçesiyle ilişkili olacağını düşündüğü için ekstradan türev operatöründen yararlanmama gerekçesini soruda yapılan hatanın ciddi bir dayanağı saymıştır. Nitekim öğretmenlerin tamamının hatanın gerekçesine yönelik makul, mantıklı ve doğru görüşler belirttikleri söylenebilir. Bu durum senaryodaki hatanın kolay keşfedilmesiyle açıklanabilir. Öğretmenlerden sadece $Ö_4$'ün dikkatsizlik gibi genel geçer bir hata gerekçesi sunduğu dikkat çekmiştir. Ayrıca $Ö_4$'ün belirttiği gibi öğrencinin türev operatörünü yazarken yanlış notasyon kullanması zincir kuralının da yanlış şekilde gösterilmesine neden olabileceği kanısını güçlü kılmaktadır. Bu nedenle türev operatörünü doğru kullanmamanın ya da bu operatörden yararlanmamanın öğrencinin zincir kuralına yönelik yanlış çözüm yapmasını tetikleyebileceği düşünülmektedir.

3.2. Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Hatalarına Yönelik Öğretim Yaklaşımları

Hata temelli senaryolardaki öğrenci hatalarına yönelik lise matematik öğretmenlerinin sergileyecekleri öğretim yaklaşımları; açıklama-gösterme, bilgi sunma, fark ettirme ve son olarak düşünceyi anlama-ileri taşıma şeklinde dört ana kategori altında toplanmıştır. Tablo 2'de öğretmenlerin öğrenci hatalarına yönelik öğretim yaklaşımlarına yer verilmiştir.

Tablo 2. Lise Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Hatalarına Yönelik Öğretim Yaklaşımları

Kategoriler	Yaklaşımlar	HTS_1	HTS_2	HTS_3
Açıklama Gösterme	Doğruyu açıklama Yanlışı gösterme	$Ö_2 Ö_3 Ö_4$		
Bilgi Sunma	Konuyu / Kavramı yeniden öğretme		$Ö_1 Ö_2 Ö_3 Ö_5$	$Ö_4$
Fark Ettirme	Öğrencinin yanlışını veya doğru çözümü fark ettirme	$Ö_1 Ö_5$	$Ö_1 Ö_2 Ö_5$	$Ö_1 Ö_2 Ö_3 Ö_5$
Düşünceyi Anlama veya İleri Taşıma	Öğrenci düşüncesini anlama veya öğrenci düşüncesini ileri taşıma	$Ö_3 Ö_5$	$Ö_4$	

HTS: Hata Temelli Senaryo

Tablo 2'ye göre HTS'lerdeki hatalar bütün olarak değerlendirildiğinde her bir öğretmenin yapılan öğrenci hatalarının giderilmesine yönelik toplamda en az iki farklı öğretim yaklaşımı sergilediği görülmektedir. Buna göre öğretmenlerin HTS'ler karşısında aynı ve tek tip yaklaşım sergilemedikleri söylenebilir. Bu durum HTS'lerdeki hataların bağlamıyla ilgili olabilir. Öğretmenlerden $Ö_3$ HTS'lere yönelik en fazla sayıda farklı öğretim yaklaşımı üretirken, $Ö_1$ ise HTS'lere yönelik en az sayıda farklı öğretim yaklaşımı üretmiştir. Öğretmenlerden $Ö_1$, $Ö_2$, $Ö_3$ ve $Ö_5$ aynı senaryolarda birden fazla öğretim yaklaşımı üreten öğretmenlerdir. Tablo 2'de hiç gerekçe belirtilmeyen öğretim yaklaşımın bulunmadığı dikkat çekmektedir. Buna göre HTS_1 ve HTS_2 en fazla sayıda farklı öğretim yaklaşımı içeren senaryolar iken HTS_3 en az sayıda farklı öğretim yaklaşımı içeren senaryodur. Yine HTS'lerde üretilen öğretim yaklaşımları incelendiğinde sırasıyla en fazladan en aza doğru HTS_2 (n=8), HTS_1 (n=7) ve HTS_3 (n=5) şeklinde bir üretim sıralaması yapılabilir. HTS'lere yönelik öğretmenlerin ürettiği öğretim yaklaşımları incelendiğinde bu yaklaşımlardan en çok konuyu/kavramı yeniden üretme yaklaşımı ile öğrencinin yanlışını veya doğru çözümü fark ettirme yaklaşımlarında aynı öğretmenlerin ($Ö_1 Ö_2 Ö_3 Ö_5$) kümeleştiği gözlenmiştir. Öğretmenlerin farklı HTS'lerde farklı öğretim yaklaşımı kategorilerine (açıklama-gösterme, bilgi sunma, fark ettirme) yoğunlaştıkları çıkarsanabilir. Aşağıda HTS_1'deki farklı öğretim yaklaşımlarına yönelik örnek alıntılara yer verilmiştir.

"Öğrenciye verilenlerin ne olduğunu ve sorunun bizden tam olarak neyi istediğini sorardım. Eğer ki öğrenci öncelikle paydaları eşitleyerek hareket ediyorsa o şekilde değil de direkt eşitliğin her iki tarafının türevini alarak işlemlerine devam edebileceğini belirtirdim. Öğrenci işlemi yine yanlış yapmaya devam ediyorsa yaptığı işlemlerin yanlış olduğunu gösterirdim. Öğrenciye iki farklı fonksiyon verildiğini ve burada toplamın türevinin alınabileceğini gösterirdim. Direkt eşitlikte hangi durumlarda, hangi aralıkta türev alınması gerektiğini anlatırdım." ($Ö_2$ – HTS_1 – Doğruyu Açıklama/Gösterme)

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3$ *olduğuna göre eşitlikteki ifadeleri öğrencinin* $h(x)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ *ve* $g(x) = 3$ *şeklinde iki ayrı fonksiyon gibi düşünmesini sağlardım. Fonksiyonların ayrı ayrı türevlerini* $h'(x)$ *ve* $g'(x)$ *şeklinde alabileceğini söylerdim. Fonksiyonların türevini alırken* $h(x)$*'in türevinde dx ve dy diferansiyellerinden yararlanarak çözüm yapmasını isterdim. Örneğin* $5x^2$ *ifadesinin diferansiyelini* $5.2x\,.dx$ *şeklinde örnekle gösterirdim. Sorudaki işlemlerde de buna benzer şekilde çözüm yapmasını sağlardım. Sonuç olarak doğru çözümü aşağıdaki sırayla uygulatırdım." ($Ö_4$ – HTS_1 – Doğruyu Açıklama/Gösterme)*

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})' = (3)'$$

$$\frac{dx.y-dy.x}{y^2}+\frac{dy.x-dx.y}{x^2}=0$$

$$\frac{x^2.y.dx-x^3.dy}{x^2.y^2}+\frac{x.y^2.dy-\ y^3.dx}{x^2.y^2}=0$$

$$x^2y.dx-x^3.dy+xy^2.dy-\ y^3.dx=0$$

$$dx.(x^2y-y^3)\ =dy.(x^3-xy^2)$$

$$\frac{(x^2y-y^3)}{(x^3-xy^2)}=\frac{dy}{dx}\rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{y.(x^2-y^2)}{x.(x^2-y^2)}=\frac{y}{x}$$

"Öğrenci sorunun cevabını $y'=\frac{2x-3y}{3x-2y}$ *şeklinde bulmuştu. Şimdi bu bulduğu cevap üzerinde denklemlerdeki yerine koyma mantığından yararlanarak hareket edelim. Belki bu sayede öğrencinin bulduğu sonuçtan daha farklı bir sonuç bulabileceğini fark ettirebiliriz. Aslında yine aynı kapıya çıkacak gibi görünüyor*

ama bulunacak yeni sonuç öğrenci üzerinde farklı bir işlem mantığıyla hareket edebilirsin gibi bir farkındalık oluşturabilir. Böylece öğrenci işlemleri ve sonuçları karşılaştırarak yaptıklarından hangisinin doğru olduğunu aklında sorgulayabilir. Doğru sonuç üzerinde bir beyin fırtınası yapılmasını da sağlar. Şimdi sonuç ifadesinde 3 yerine başlangıçta 3'e eşit olan $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$ *ifadesini koydurarak öğrencinin işlemlerine devam etmesini sağlarız. İşlemleri şu şekilde özetletebiliriz." (*$Ö_5$ *– HTS*$_1$ *– Öğrencinin Yanlışını Fark Ettirme)*

$y' = \frac{2x-3y}{3x-2y}$ *türev sonucunda 3 yerine eşitini* $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$ *yazarak işleme devam edelim.*

$$y' = \frac{2x - \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).y}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).x - 2y}$$

$$y' = \frac{2x-(x+\frac{y^2}{x})}{\left(\frac{x^2}{y}+y\right)-2y} = \frac{2x-x-\frac{y^2}{x}}{\frac{x^2}{y}+y-2y} = \frac{x-\frac{y^2}{x}}{\frac{x^2}{y}-y}$$

$$y' = \frac{\frac{x^2-y^2}{x}}{\frac{x^2-y^2}{y}} = \frac{x^2-y^2}{x} \cdot \frac{y}{x^2-y^2} = \frac{y}{x}$$

"Öğrenciye neden ilk başta paydaları eşitleyerek hareket ettin? Acaba ilk başta eşitlikte türev alarak işleme başlasaydın ne olurdu? diye sorardım. y'nin x'e bağlı bir fonksiyon olduğunu düşünerek kapalı fonksiyonun türevini uygulamaya devam etmişsin. Peki aynı düşünceyi neden ilk başta türev alarak uygulamadın? diye sorardım. İşlemler sonunda da öğrenciye şöyle bir soru sorardım. İfade $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3$ *değil de* $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=10$ *olsaydı yaptığımız işlemler sonunda farklı bir cevap mı bulurduk? Yoksa cevap yine aynı mı olurdu? Bu şekilde öğrencinin yapılan işlemler üzerine düşünmesini sağlardım. (*$Ö_3$ *– HTS*$_1$ *– Öğrenci Düşüncesini Anlama veya İleri Taşıma)*

HTS$_1$'deki öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmen cevaplarının; açıklama-gösterme, fark ettirme ve düşünceyi anlama-ileri taşıma kategorileri altında toplandığı görülmektedir. HTS$_1$'de en fazla görüş belirtilen kategori açıklama-gösterme olurken bilgi sunma kategorisinde herhangi bir görüş belirtilmediği dikkat çekmiştir. HTS$_1$'de $Ö_3$ ve $Ö_5$ haricindeki tüm öğretmenlerin sadece bir öğretim yaklaşımı sergilediği söz konusudur. HTS$_1$'deki hatalara yönelik verilen cevaplar incelendiğinde öğretmenlerin hataya yönelik; soruda verilenleri-istenilenleri göstererek soruyu açıklama, soruda doğru cevabı göstermeye çalışma, bulunan sonuç üzerinden hareket ederek öğrencinin hatasını kendisinin fark etmesini sağlama ve son olarak öğrencinin düşüncesini açığa çıkarmaya ve daha derin düşünmesini sağlamaya yönelik soru sorma eğiliminde oldukları söylenebilir. Matematik öğretmenlerinin yaklaşımlarının tümünün HTS_1'deki hatayı gidermeye ve doğru sonucu buldurmaya yönelik yeterli olmayan işlemsel ağırlıklı öğretim yaklaşımları oldukları belirtilebilir. Aşağıda HTS_2'deki farklı öğretim yaklaşımlarına yönelik örnek alıntılara yer verilmiştir.

"Öğrencinin aklına bu şekil yanlış bir çözüm gelebilir. Çünkü öğrenci x ile y arasındaki ilişkiyi net bilmediğinde x^2'nin türevi için nasıl 2x diyorsa y'nin türevi için de 1 diyebilir. Öğrenci tam anlamıyla kapalı fonksiyonun türevini özümseyememiş ve değişkenler arasındaki ilişkileri doğru anlayamamıştır. Öncelikle öğrenciye bağımlı değişken nedir bağımsız değişken nedir bunlardan bahsedilir. Daha sonra kapalı fonksiyonun türevi nasıl alınır bununla ilgili birkaç bilgi verilir. Öğrencinin burada y değişkenini x'e bağlı düşünmesini engelleyen duruma örnekle açıklık getirmek gerekir. Normalde $y = f(x)$ denir sorularda. Aslında burada y değişkeninin, x bağımsız değişkenine bağlı bir bağımlı değişken olduğu öğrenciye vurgulanır. Öğrenciye türev alırken y'nin türevinin 1 *değil de $y' = f'(x)$ olduğu izah edilir. Zaten y'nin türevinin bilinmediği bu yüzden y' şeklinde bir gösterimde bulunulduğuna dikkat çekilir. Bu örnek gösterim hatayı gidermek için öğrenciye sunulabilir." ($Ö_1$ – HTS_2 – Konuyu/Kavramı Yeniden Öğretme)*

"Öğrenci, ifadenin bütününe x deniliyorsa belirli bir miktarına da x denir demiş. Yani şöyle düşünmüş. Bir kum yığınından bir kum tanesini çıkardığımda bu durum kumun yığınlığını değiştirmez demiş. Sonrasında öğrenci türev aldığında cevabı yanlış bulmuş. Şimdi kapalı ve bileşke fonksiyonların türevlerine yönelik birer örnek vererek öğrencinin bulduğu cevabın yanlış olduğunu fark ettirebiliriz. Bileşke fonksiyonun türevini gösterebilmek için $f(3x+5)$ fonksiyonunu kullanabiliriz mesela. $f(3x+5)$ fonksiyonunun türevini aldığımızda öğrenciye bu türevi sadece $f'(3x+5)$ şeklinde mi yoksa $f'(3x+5)\cdot(3x+5)'$ şeklinde mi göstereceğini sorarız. Öğrenci sadece dışın türevini almaya odaklanırsa aynı zamanda için de türevinin alınması gerektiğini belirtiriz. O durumla ilgili daha basit bir örnek verip hatasını daha iyi ve daha kolay fark etmesini sağlarız. Mesela $f(x)$ fonksiyonunun türevi alınıyor. Bu durumda türev ifadesini sadece $f'(x)$ şeklinde göstermediğimizi aynı zamanda $f'(x)\cdot(x)'$ biçiminde ifade ettiğimizi dolayısıyla türevin $f'(x)\cdot(x)' = f'(x)\cdot 1 = f'(x)$ olduğunu açıklarız. Bu verilen örnekle aslında sadece dışın değil de için de türevinin alındığına dikkat çekeriz. Aslında bütün örneklerde bu mantığın işlediğini öğrenciye kavratmaya çalışarak hatasını yok etmek isteriz." ($Ö_2$ – HTS_2 – Öğrencinin Yanlışını Fark Ettirme)

"Öğrenciye 2x cebirsel ifadesini eşitlikte neden yalnız bıraktın? diye sorardım. Devamında neden y değişkenini yalnız bırakmadın? diye sorardım. Acaba y değişenini yalnız bıraksaydın işlemde türev adına neler yapmayı düşünürdün? diye sorardım." ($Ö_4$ – HTS_2 – Öğrenci Düşüncesini Anlama veya İleri Taşıma)

HTS_2'deki öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmen cevaplarının; bilgi sunma, fark ettirme ve düşünceyi anlama-ileri taşıma kategorileri altında toplandığı görülmektedir. HTS_2'de en fazla görüş belirtilen kategori bilgi sunma olurken açıklama-gösterme kategorisinde herhangi bir görüş belirtilmediği dikkat çekmiştir. HTS_2'de $Ö_1$, $Ö_2$ ve $Ö_5$ haricindeki öğretmenlerin sadece bir öğretim yaklaşımı sergilediği söz konusudur. HTS_2'deki hatalara yönelik verilen cevaplar incelendiğinde öğretmenlerin hataya yönelik; öğrencide eksik gördüğü konuyu/kavramı yeniden öğretme, örnekler üzerinden öğrenci düşüncesini anlayarak doğru çözümü veya öğrencinin yanlışını fark ettirme ve son olarak öğrencinin düşüncesini açığa çıkarmaya ve daha derin düşünmesini sağlamaya yönelik soru sorma eğiliminde oldukları söylenebilir. Matematik öğretmenlerinin yaklaşımlarının tümünün HTS_2'deki hatayı gidermeye ve doğru sonucu buldurmaya yönelik formel öğretim yaklaşımları oldukları belirtilebilir. Aşağıda HTS_3'deki farklı öğretim yaklaşımlarına yönelik örnek alıntılara yer verilmiştir.

"Öğrenciye ilk planda türev operatörünün ne olduğunu, hangi durumlarda nasıl kullanıldığını öğretirdim. Daha sonra $\frac{d}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ ve $\frac{dx}{dy}$ notasyonlarının hangi anlamlara geldiğini öğrencilere kavratırdım. Bundan başka öğrencilere zincir kuralının mantığını anlatırdım. Zincir kuralından hangi durumlarda nasıl yararlanılması gerektiğini ve bu kuralın sağladığı kolaylıkları öğrencilere benimsetirdim." ($Ö_4$ – HTS_3 – Konuyu/Kavramı Yeniden Öğretme)

"Zincir kuralına yönelik bilindik bir örnek yoluyla öğrencinin hatasını anlamasını sağlardım. Öğrenciye $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ dönüşümlerini gösterirdim. Bu dönüşümlerde f, u ve x cebirsel ifadelerinin birbirlerine ne şekilde bağlı olduklarını bir ok yardımıyla gösterirdim. Bir nevi bu okun yerinde bir zincirin olduğunu öğrenciden düşünmesini isterdim. Birbirine zincirlerle sıkıca bağlı olan bu cebirsel ifadeleri $f \rightarrow u \rightarrow x$ ok modeliyle gösterirdim. Burada hangi değişkenin bağımsız-bağımlı değişkenler ve hangisinin ara değişken olduğunu öğrenciye sorardım. Sonuç olarak f'den x'e varabilmek için u'dan geçmenin gerekip gerekmediğini öğrenciye sorardım. Buna göre zincir kuralının $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ biçiminde yazılıp yazılamayacağını öğrenciye sorardım. Öğrenci eğer yazılabilir derse ara değişkene dikkat etmesi gerektiğini, bu değişkenin u olduğunu ve her iki oranda da sırasıyla bağımsız-bağımlı değişken gibi çift rolde oynadığını öğrenciye anlatırdım. Verdiğim bu örnek ile öğrencinin kendi yaptığı çözümü karşılaştırmasını isterdim. Öğrencinin yanlış çözümünde ok

modelini $f \rightarrow x \rightarrow g \rightarrow x$ *şeklinde oluşturup oluşturmadığını öğrenciye sorardım. Bu modelin zincir kuralına verilebilecek bir örnek olup olmadığını öğrenciden düşünmesini isterdim. Oklardan yararlanarak oluşturduğu* $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}$ *zincir kuralında bir hata olup olmadığını sorardım.* $f(g(x))$ *ifadesinin x'e göre mi yoksa* $g(x)$*'e göre mi değişmesi gerektiğini sorardım. Oluşturduğu zincir kuralının aslında doğrusunun* $f \rightarrow g \rightarrow x$ *şeklinde olmasının gerekip gerekmediğini sorardım. Bu şekilde öğrencinin kendi çözümüyle, yapılması gereken doğru çözümü karşılaştırmasını sağlayarak doğru cevaba ulaşmasını sağlardım." (*$Ö_1$ *–* HTS_3 *– Öğrencinin Yanlışını Fark Ettirme)*

HTS_3'teki öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmen cevaplarının; bilgi sunma ve fark ettirme kategorileri altında toplandığı görülmektedir. HTS_3'te en fazla görüş belirtilen kategori fark ettirme olurken açıklama-gösterme ile düşünceyi anlama-ileri taşıma kategorilerinde herhangi bir görüş belirtilmediği dikkat çekmiştir. HTS_3'te tüm öğretmenlerin sadece bir öğretim yaklaşımı sergilediği söz konusudur. HTS_3'teki hatalara yönelik verilen cevaplar incelendiğinde öğretmenlerin hataya yönelik; öğrencide eksik gördüğü konuyu/kavramı yeniden öğretme ile örnekler üzerinden öğrenci düşüncesini anlayarak doğru çözümü veya öğrencinin yanlışını fark ettirme eğiliminde oldukları söylenebilir. Matematik öğretmenlerinin yaklaşımlarının tümünün HTS_3'teki hatayı gidermeye ve doğru sonucu buldurmaya yönelik formel öğretim yaklaşımları oldukları belirtilebilir.

4. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Araştırmanın bu bölümünde lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türeviyle ilgili HTS'lere yönelik cevaplarının analizinden elde edilen bulgular araştırmanın amacına uygun şekilde tartışılmıştır. Ayrıca araştırmanın sonuçlarına göre bazı öneriler sunulmuştur.

Araştırmanın bulguları lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevi konusuna yönelik öğrenci hatalarını; toplamın türevi işlemini ilk planda tercih etmeme (i), uygun türev operatörlerinden ve diferansiyelden yararlanmama (ii), kısmi türevi kullanmama (iii), bileşke fonksiyonun türevini uygulamama (iv), değişken rollerinin farkında olmama (v) ve son olarak zincir kuralını anlamama (vi) gerekçelerine dayandırdıklarını ortaya koymuştur. Lise matematik öğretmenlerine cevaplamaları için ilgili konuda hata temelli üç senaryo yöneltilmiştir. Öğretmenlerin ikinci ve üçüncü senaryolardaki hataları doğru belirledikleri ve bu hataların kaynaklarının farkında oldukları söylenebilir. Ancak öğretmenlere yöneltilen ilk senaryodan elde edilen cevaplarda öğretmenlerin tamamının hem hatayı net şekilde belirleyemedikleri hem de hatanın kaynağına yönelik yeterli bir gerekçe ortaya koyamadıkları görülmüştür. Bu sayede öğretmenlerin birinci senaryodaki hatanın kaynağının tam farkında olamadıkları öne sürülebilir. Öğretmenlerin ilk senaryodaki hatanın gerekçesini; toplamın türevi işlemini ilk planda tercih etmeme ve kısmi türevi kullanmama ile ilişkilendirmeleri, onların bu senaryo özelindeki anlayışlarının kavramsal değil aksine işlemsel yaklaşımla örtüştüğünü göstermektedir. İlgili senaryoda öğrenci türev aramaya yönelik işlem prosedürlerini kendince doğru uygulamaktadır. Hatta öğrenci *y*'yi *x*'in türevlenebilir bir fonksiyonu biçiminde düşünerek hareket etmiştir. Ancak öğrencinin çözüm yaptıktan sonra doğru yaptığını düşünerek çözümün kapalı fonksiyon için sağlayıp sağlamadığını kontrol etmemesi bu hatanın kaynağıdır. Eğer ki öğrenci yaptığı işlemin sonucunda çözümün köklerini incelemiş olsaydı tanım kümesine karşılık görüntü kümesinde iki farklı değer ortaya çıkacağını görmüş olacak, bu durumda çözümün kapalı fonksiyon için sağlamadığını tespit etmiş olacak ve belki de yaptığı işlemleri kontrol edip farklı bir yol deneyerek soruyu doğru çözmüş olacaktı. Öğretmenlerin HTS_1'deki hataların kaynağına yönelik geçerli ve yeterli bir dayanak ortaya koyamadıkları bulgusu, konuyla ilgili literatürde gerçekleştirilmiş çalışmaların (Even & Tirosh, 1995; Tirosh, Even & Robinson, 1998) bulgularını güçlendirmektedir. İlgili çalışmalardan elde edilen bulgularda öğretmenlerin farklı matematik konularında öğrenci hatalarının farkında olamadıkları ve hataların kaynağını belirlemede yetersiz kaldıkları görülmüştür. Bu çalışmada lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevine yönelik hatayı ve hatanın dayanağını net ortaya koyamamalarının sebeplerinden birisi öğretmenlerin örtük türev konusundaki formel bilgilerinin yetersiz olmasıyla açıklanabilir. Deneyim süreleri dikkate alındığında öğretmenlerin lisans mezuniyetinden aktif öğretmenlik dönemine kadar analiz alanında türev konusuna yönelik formel bilgileri uzunca bir süre görmemiş olması bir dezavantaj olarak değerlendirilebilir. Nitekim Wanjala ve Orton (1996) yaptıkları çalışmada öğrencilerin muhtemel hatalarını tam olarak belirleyememesini öğretmenlerin temel bilgi kayıplarıyla ilişkilendirmiştir. Çalışmada ortaya çıkan bu sonucun bir diğer sebebi de öğretmenlerin hem lisans hem de öğretmenlik dönemi boyunca örtük türev konusunda hata temelli aktiviteler ile ilgili ciddi eğitim süzgecinden geçmemiş olmaları gösterilebilir.

Araştırma bulguları lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevi konusuna yönelik öğrenci hatalarını gidermek için; doğruyu açıklama-gösterme (i), konuyu-kavramı yeniden öğretme (ii), öğrencinin yanlışını veya doğru çözümü fark ettirme (iii) ve son olarak öğrenci düşüncesini anlama veya ileri taşıma (iv) öğretim yaklaşımlarını sergilediklerini ortaya koymuştur. Öğretmenlerin hataya karşı ürettikleri öğretim yaklaşımları arasında en çok fark ettirme yaklaşımını (n=9) sonra bilgi sunma yaklaşımını (n=5) ve en az ise açıklama-gösterme (n=3) ile düşünceyi anlama veya ileri taşıma yaklaşımlarını (n=3) kullandıkları görülmüştür. Araştırmanın bu bölümünden elde edilen bulgular öğretmenlerin; hatalar karşısında tek tip öğretim anlayışıyla hareket etmediklerini, farklı müdahale anlayışlarına sahip olduklarını ve öğrenci anlayışlarını bilme bilgilerine yönelik pedagojik farklılıklar sergilediklerini göz önüne sermektedir. Öte yandan öğretmenlerin kullandıkları öğretim yaklaşımlarındaki farklılığın HTS'lerdeki hataların nitelikleriyle de ilişkili olabileceği düşünülmektedir.

Açıklama-söyleme ve bilgi sunma eğilimlerinde olan matematik öğretmenlerinin öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmenlerin, öğrenci hatasını gidermeye yönelik bir strateji geliştirmek istemelerine rağmen öğrencinin hatasını; tam olarak deşecek ve görmesini sağlayacak soruları üretmede yetersiz kaldıkları söylenebilir. Araştırmada bu eğilimi sergileyen öğretmenlerin; soruda verilenleri ve istenilenleri söyletmeye çalıştıkları, doğrudan yanlışı göstermeye çalıştıkları, bir örnek kullanarak işlemsel yollarla doğru çözümü açıklamaya çalıştıkları ve öğrencide eksik gördükleri konuyu/kavramı yeniden öğretme çabası içerisine girdikleri tespit edilmiştir. Bu eğilimlerde hareket eden öğretmenlerin, öğrenci hatasının iç yüzünü hangi sorularla nasıl ortaya çıkaracaklarını bilmedikleri ifade edilebilir. Matematik öğretmenlerinin sahip olduğu bu yaklaşımlar, literatürde hataya yaklaşım konusundaki araştırmaların (Chick & Baker, 2005; Didiş *et al.*, 2016; Didiş-Kabar & Amaç, 2018) bulgularını güçlendirmektedir. Didiş *et al.* (2016) çalışmasında öğrenci hatasını direkt gösterme ya da hatayı düzeltme eğiliminde bulunan öğretmen adaylarının sergiledikleri bu yaklaşımların kolay bir yöntem olarak görülmesinden kaynaklanacağını belirtmiştir. Bu araştırmada, öğretmenlerin açıklama-söyleme ve bilgi sunma eğilimlerinde olmalarının sebebi hataya nasıl yaklaşacaklarını bilmemelerinden veya öğrencinin hatasına yönelik farkındalığın kendisinde oluşmasını sağlayacak yeterli pedagojik bilgiye sahip olmamasından kaynaklanabilir.

Bu araştırmada fark ettirme eğiliminde olan matematik öğretmenlerinin öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmenlerin; sonuçtan hareketle yanlışı fark ettirme, örnekler üzerinden yanlışı fark ettirme, konuyu hatırlatan örnekler sunma, ipuçları kullanarak doğru sonucu fark ettirme ve sorular üzerinden doğru çözümü ya da yanlışı fark ettirme yaklaşımları sergilediği görülmektedir. Buna göre öğretmenlerin fark ettirme eğilimi gösterme süreçlerinde işlemsel anlamda çözümü direkt çağrıştıran ve temel matematiksel bilgileri hatırlatan davranışlar sergiledikleri belirtilebilir. Ancak öğretmenlerin fark ettirme bağlamında sordukları soruların çözüm yöntemini yordayıcı ve düşündürücü sorular olmadığı söylenebilir. Araştırmadan elde edilen bu bulgular literatürde hataya yaklaşım bağlamında gerçekleştirilmiş az sayıdaki çalışmanın (Chick & Baker, 2005; Didiş *et al.*, 2016; Didiş-Kabar & Amaç, 2018) bulgularını destekler niteliktedir. Nitekim Didiş *et al.* (2016) çalışmasında fark ettirme eğilimini pedagojik olarak önemseyen öğretmen adaylarının, öğrencileri neden-sonuç bağlamında düşündüren sorular sorarak hatanın kaynağına yönlendirmede yeterli olmadıklarını belirtmiştir.

Bu araştırmada öğretmenlerin fark ettirme eğiliminde olmalarının sebebi, yapılan işlemlerle çözüme ulaşmada aracı olan sorular ve ipuçları kullanılarak yürütülen öğretim yaklaşımı sayesinde öğretmenlerin öğrenci hatalarını gidereceğine yönelik algıya kapılmaları olabilir. Bu durumun bir diğer sebebi araştırmada kullanılan HTS'lerdeki hatalar olabilir. Sadece yazılı bir metin yoluyla öğretmenlere sunulan hatalara yönelik yaklaşımlar sergilenirken öğrencilerle etkileşim sağlanamamıştır. Bu durum öğretmenlerin, öğrencilerin nasıl düşündüklerini tam olarak anlamaları önünde bir handikap olabilir. Öğretmenlerin sadece yazılı metindeki senaryolar karşısında ortaya koydukları müdahale yöntemlerinin gerçek sınıf ortamındaki uygulamalarda da aynı şekilde sonuçlanacağı garanti değildir (Chick & Baker, 2005; akt. Didiş *et al.*, 2016). Öğrenci düşüncelerinin tam olarak belirlenememesi öğretmenlerin hataya yaklaşım sürecinde üretecekleri stratejilerin net şekilde ortaya çıkamamasına neden olabilir. İlgili durumun bir diğer sebebi araştırmada sadece görüşme yoluyla elde edilen veriler olabilir. Yapılan çalışmanın sadece bire bir görüşme yoluyla değil aynı zamanda gerçek sınıf ortamında uygulanarak etkileşimli gözlemlenmesi öğretmenlerin hataya yaklaşım performansları üzerinde daha farklı sonuçlar doğurabilir. Böylece birey etkileşiminin daha fazla olduğu faktörlerin devreye sokulmasıyla birlikte öğretmenlerin hatanın kaynağını belirlemeye ve giderilmesine yönelik daha geçerli cevaplarına ulaşılabilir. Son (2013) araştırma katılımcılarının gerçek bir sınıf ortamında sunulan senaryoları benzer şekillerde gerçekte ne ölçüde ele alacaklarının kestirilemeyeceğini ifade etmiştir. Hines ve McMahon (2005) ise belirli şekillerde hareket etme eğiliminin gerçekten de öğretmenlerin muhakeme etme ve uygulama yapma becerilerine ilişkin önemli farkındalık sağlayacağını belirtmiştir. Öğretmenlerin fark ettirme eğilimi göstermelerin bir diğer sebebi de benimsedikleri düşünce yapıları ve inançlar olabilir. Öğretmenlerin sergilediği farklı öğretim yaklaşımları, onlarda yerleşmiş olan ve değişime dirençli bazı genel tercihlerden kaynaklanabilmektedir (Baştürk, 2009). Öğretmenlerin düşünce ve inançları, yine onların anlayışları, muhakeme yetenekleri ve dersin öğretimi sırasındaki davranışları üzerinde büyük bir etkiye sahiptir (Fang, 1996; Pajares, 1992).

Bu araştırmada düşünceyi anlama ve ileri taşıma eğiliminde olan öğretmenlerin öğretim yaklaşımları incelendiğinde öğretmenlerin; sorular aracılığıyla öğrenci düşüncesini açığa çıkarma veya düşünce üzerinde düşündürme ile düşünceyi ileri doğru taşıma yaklaşımlarını sergilediği görülmüştür. Buna göre öğretmenlerin düşünceyi anlama veya ileri taşıma eğilimi gösterme süreçlerinde neden-niçin kalıbında sorulardan yararlanarak öğrencilerin hatayı fark etmelerini ve gidermelerini sağlayacak davranışlarda bulundukları belirtilebilir. Öğretmenlerin hataya yaklaşım karşısında kullandıkları soru kalıplarının öğrencilerin düşüncelerini sorgulayan ve çözüm yöntemlerini gerekçelendiren yapıda oldukları söylenebilir. Bu durum matematik öğretmenlerinin öğrencilere kendi hatalarını fark ettirme çabası içerisinde oldukları şeklinde açıklanabilir. Araştırmadan elde edilen bu bulgular literatürde hataya yaklaşım bağlamında gerçekleştirilmiş az sayıdaki çalışmanın (Didiş *et al.*, 2016; Didiş-Kabar & Amaç, 2018) bulgularıyla örtüşmektedir. Martino ve Maher (1999) öğretmenlerin, yapılan çözümlerin savunulmasını ve dayanak gösterilmesini sağlayan "neden böyle düşünüyorsun?", "niçin böyle yaptın?" ve "nasıl böyle bir sonuca ulaştın?" menşeli sordukları soruların öğrencilerin daha fazla düşünmelerini ve çözümü tekrardan organize edebilmelerini sağlayacağını belirtmiştir. Öğretmenlerin hataya yaklaşımlarda akıl yürütme tarzında sorularla öğrenci düşüncelerini açığa çıkarmaya gayret göstermeleri sevindiricidir. Öğretmenlerin düşünceyi anlama ve ileri taşıma davranışları, onların hataya yaklaşım ekseninde yeterli düzeyde pedagojik donanıma sahip oldukları şeklinde yorumlanabilir. Öte yandan bu araştırmada düşünceyi anlama ve ileri taşıma yaklaşımının HTS'lerde en az kullanılan yaklaşım olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum öğretmenlerin öğrenci hatalarına karşı yaklaşım sergilerken zorlandıklarına işaret etmektedir.

Bu araştırmada sadece mesleki deneyimi daha fazla olan lise matematik öğretmenleriyle görüşmelerin yürütülmesi çalışmanın bir sınırlılığı kabul edilebilir. Araştırmanın bulgularına göre öğretmenlerin mesleki deneyim süresi ile hataya yaklaşımları arasında doğru orantılı bir ilişkinin varlığına yönelik net bir yorum yapılamamaktadır. Araştırmada bazı öğretmenlerin düşünceyi anlama ve ileri taşıma yaklaşımıyla hareket ederek hatayı gidermek için uygun yanıtlar verdikleri söylenebilir. Ancak bu durum araştırmaya katılan tüm öğretmenler ve HTS'ler bakımından değerlendirildiğinde genellenebilir sayılamamaktadır. Öğretmenlerin mesleki hayatlarında deneyim kazanmış olmaları onların hataya yaklaşım konusunda başarılı olacaklarını tek başına garanti etmemektedir. Bu nedenle öğretmenlerin deneyim sürelerinin, hataya yaklaşım üzerinde neden tam etkili olmadığına yönelik araştırmalar yürütülebilir. Ayrıca farklı deneyim sürelerine sahip öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevi konusundaki hataya yaklaşımları incelenebilir. Bunun haricinde öğretmenler için düzenlenen hizmet içi eğitim kurslarında hata temelli aktiviteler düzenlenerek derste hatalardan nasıl yararlanılacağı noktasında öğretmenler bilgilendirilebilir (Deblois, 2006). Araştırmaya katılan öğretmenlerin hizmet öncesinde analiz, özel öğretim yöntemleri, matematik öğretimi ve okul deneyimi derslerini almalarının hataya uygun yaklaşım sergilemeleri üzerinde etkisinin olmadığı açıktır. Nitekim araştırma bulguları hem hatanın gerekçesini doğru belirleme hem de hatalara karşı uygun yaklaşımlar sergileme noktasında matematik öğretmenlerinin pedagojik eksikliklerine dikkat çekmiştir. Bu araştırma özelinde değerlendirilecek olunursa öğretmenler hizmet öncesi dönemde analiz dersindeki kapalı fonksiyonun türevi konusunda edindikleri kazanımları mesleki yaşantılarında kavramsal anlamda etkili transfer edememiş olabilir. Yine benzer şekilde öğretmenlerin bilhassa uygulama tabanlı okul deneyimi, özel öğretim yöntemleri ile matematik öğretimi derslerinde hata temelli yaklaşımlara yönelik pedagojik bilgilerini geliştiremedikleri ve bu bilgileri başarılı şekilde öğretmenlik yaşantılarına taşıyamadıkları söylenebilir. Hizmet öncesi dönemdeki uygulama derslerinde öğrenci anlayışlarını bilme bilgisine yönelik öğrenme ortamları sağlanarak hataya yaklaşım etkinliklerinin gerçekleştirilmesi, lise matematik öğretmenlerinin öğretim stratejileri bilgilerinin gelişimi açısından önemlidir. Bu nedenle hizmet öncesi dönemde deneyimlenen bu derslerin içeriklerinin ve uygulamalarının hataya yaklaşım bakımından değerlendirilmesinde fayda görülmektedir.

Bu araştırmada sadece kapalı fonksiyonun türevine yönelik hata temelli aktivitelerin yürütülmesi araştırmanın bir diğer sınırlılığı olarak kabul edilebilir. Bilindiği üzere türev konusu kendi içinde çok farklı alt konular ihtiva etmektedir. Matematik öğretmenleri üzerinde sadece kapalı fonksiyonlar değil aynı zamanda türevle ilişkili süreklilik, geometrik ve fiziksel anlam, ekstremum, dönüm noktası ve asimptotlar gibi alt konularda da öğretmenlerin öğrenci düşüncelerini nasıl anladıklarına yönelik araştırmalar yapılmasının literatüre ciddi katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Yine benzer şekilde bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin sadece hataya yaklaşımları incelenmiştir. Hataya yaklaşım konusunun öğrenci anlayışlarını bilme bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisiyle bağdaştırıldığı bilinmektedir. Bu bilgi türleri pedagojik alan bilgisi çatısı altında tanımlanmakta olup konu alanı bilgisi bileşeniyle birlikte pedagojik alan bilgisini besleyen alt bileşenler arasında gösterilmektedir. Literatürde hem pedagojik alan bilgisinin alt bileşenlerle hem de alt bileşenlerin kendi arasındaki ilişkileri bilindiğinden öğretmenlerin sadece kapalı fonksiyonun türevindeki hataya yaklaşımlarını değil aynı zamanda bu yaklaşımların konu alanı bilgilerindeki yansımalarına yönelik de araştırmalar yapılabilir. Bu sayede matematik öğretmenleri hem kendi kavramsal anlayışlarını test ederek ne düzeyde olduklarına yönelik farkındalık oluşturabilir hem de ilgili konudaki eksikliklerini görebilir. Böylece öğretmenler hem hatalarının farkında olurlar hem de hatalarla yüzleşerek öğrenmelerini yeniden düzenleyebilirler. Ancak diğer yandan öğrenci hatalarının nedenlerini bilmek hataları ortadan kaldırmayı garanti etmemektedir (Baştürk, 2009). Buna göre matematik öğretmenlerinin, anlamlı öğrenme için hataları doğru kullanmayı da bilmeleri gerekir. Bu araştırmada matematik öğretmenlerinin hataya yaklaşım bağlamındaki yetersizlikleri bilindiğinden hataya yaklaşımın pedagojik alan bilgisi üzerindeki etkisine yönelik yeni çalışmalar yapılabilir. Öğretmenlerin sadece türev konusunda değil aynı zamanda diğer 12.sınıf matematik konularında da karşılaşabilecekleri öğrenci hataları hakkında ders kitaplarında bilgilendirici ve uyarıcı metinlere yer verilebilir. Hatta öğretmenlerin; türev konusunun farklı alt konularına yönelik hataya yaklaşımlarının, pedagojik alan bilgilerindeki bilişsel gelişimleri üzerine araştırmalar yürütülebilir. Hataya yaklaşım dışında daha farklı yöntem ve stratejiler kullanılarak da öğretmenlerin öğrenci anlayışlarını bilme bilgilerini geliştiren çalışmalar uygulanabilir. Hataya yaklaşımın duyuşsal becerilerle de ilişkilendirildiği bilindiğinden kapalı fonksiyonun türevinde hataya yaklaşım kullanılarak yapılan öğretimin, öğretmenlerin tutumları, kaygıları, özgüvenleri ve algıları üzerinde etkisinin olup olmadığı gelecekte yapılacak deneysel araştırmalarla tespit edilebilir.

Matematik eğitimi alanında yeni öğretim yaklaşımlarının daha sık kullanılmasıyla birlikte öğrenci hataları da diğer öğretim enstrümanları gibi yeni bir öğretim stratejisi olarak öğretim ortamlarında kendisine yer bulmuştur. Hataya yaklaşım bağlamında yapılan çalışmalarda öğrenci hatasına yönelik pozitif bir bakış açısının olduğu gözlenmektedir. Yapılan araştırmalar hataların bir eğitim aracı olarak görülmesini sağlamakla birlikte bu hatalara bilginin habercisi misyonunu da yüklemiştir (Astolfi, 1997; Charnay, 1986; akt. Baştürk, 2009). Yapılan araştırmalarda öğrenci hatalarını inceleme fırsatı bulan katılımcıların ya öğretmenler ya da öğretmen adayları oldukları gözden kaçmamaktadır. Buna bağlı olarak öğrenci hatalarının nasıl anlaşıldığına yönelik direkt katılımcı düşünceleri çalışmanın merkezine alınarak elde edilen bulgular yorumlanmaktadır. Öğrenci hatasının analizinde sadece öğrenci ve çözüm odaklı yapılan eylemlerin ön plana çıkması hataya yaklaşımda farklı değişkenlerin oynadığı rolü (Renè de Cotret, 1999; akt. Baştürk, 2009) arka plana itmektedir. Halbuki öğrencinin hangi koşulda hataya dayalı bir beceri sergilediği ve hatanın üretildiği anda öğrenen ile öğretenin amaçlarının ne olduğu gibi faktörlerin de göz önünde bulundurulması gerekir (Deblois, 2006; akt. Baştürk, 2009). Bu nedenle gelecekte yapılacak araştırmalarda, öğrenme ortamlarında öğrencilerin yapacakları hatalar ile öğretmenlerin hataya yaklaşımları incelenirken öğrenci ve öğretmen davranışlarının dikkatli şekilde gözlemlenmesi tavsiye edilmektedir.

5. KAYNAKLAR

Ärlebäck, J.B., Doerr, H., & O'Neil, A.H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(4), 314-336. Doi: https://doi.org/10.1080/10986065.2013.834405

Amaç, R., & Didiş-Kabar, M.G. (2019). Prospective middle school mathematics teachers' awareness of students' errors regarding the use of letters in algebra and algebraic operations. *Journal of Qualitative Research in Education, 7*(4), 1525-1552. Doi: https://doi.org/10.14689/issn.2148-2624.1.7c.4s.10m

An, S., & Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*, 717-753. Doi: https://doi.org/10.1007/s10763-011-9324-x

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2009). *Curriculum design paper: Version 2*. New South Wales, Sydney: ACARA Press. Retrieved from the Web Site: https://docs.acara.edu.au/resources/Curriculum_Design_Paper_.pdf

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2012). *Curriculum design paper: Version 3*. Sydney: ACARA Press. Retrieved from the Web Site: https://docs.acara.edu.au/resources/Curriculum_Design_Paper_version_3_(March_2012).pdf

Aydın, N., & Erbaş, A.K. (2014). *High school mathematics textbook: 12th grade*. Ankara: Aydın Publishing and Education Services.

Ball, D.L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.). *Handbook of Research on Teaching* (Vol 4, pp. 433-456). New York: Macmillan. Web Site: https://www.academia.edu/2548010/Research_on_teaching_mathematics_The_unsolved_problem_of_teachers_mathematical_knowledge

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Doi: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baştürk, S. (2009). Student teachers' approaches to student's mistakes in the case of the absolute value concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education, 3*(1), 174-194. Web Site: https://dergipark.org.tr/tr/pub/balikesirnef/issue/3368/46500

Baumard, P., & Starbuck, W.H. (2005). Learning from failures: Why it may not happen, *Long Range Planning, 38*, 281-298. Doi: https://doi.org/10.1016/j.lrp.2005.03.004

Berliner, D.C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research,35*(5), 463-482. Doi: https://doi.org/10.1016/S0883-0355(02)00004-6

Berg, B.L. (2001). *Qualitative research methods for the social sciences* (4th Edition). Needham, Massachusetts: Allyn & Bacon, Pearson Publishing. Web Site: https://books.google.com.tr/books/about/Qualitative_Research_Methods_for_the_Soc.html?id=9SRHAAAAMAAJ&redir_esc=y

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500. Doi: https://doi.org/10.1080/00207390010022590

Bogdan, R.C., & Biklen, S.K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (5th Edition). Boston: Allyn & Bacon, Pearson Publishing. Web Site: https://books.google.com.tr/books/about/Qualitative_Research_for_Education.html?id=HSMiAQAAIAAJ&redir_esc=y

Borasi, R. (1986). *On the educational roles of mathematical errors: Beyond diagnosis and remediation*. Unpublished Doctoral Dissertation. State University of New York, Buffalo, USA. Web Site: https://www.proquest.com/dissertations-theses/on-educational-roles-mathematical-errors-beyond/docview/303527036/se-2

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2-8. Web Site: http://www.jstor.org/stable/40247900

Borasi, R. (1988). Towards a reconceptualization of the role of errors in education: The need for new metaphors. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, April 5-9, New Orleans LA, USA. Web Site: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED295969.pdf

Borasi, R. (1989). Students' constructive uses of mathematical errors: A taxonomy. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, March 27-31, San Francisco, USA. Web Site: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED309069.pdf

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for ınquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208. Doi: https://doi.org/10.2307/749507

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation. Retrieved from the Web Site: https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/458429

Borji, V., & Martinez-Planell, R. (2019). What does 'y is defined as an implicit function of x' mean?: An application of APOS-ACE. *Journal* *of Mathematical Behavior, 56*, 1-18. Doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100739

Borji, V., & Martinez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 163-179. Doi: https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y

Borman, K.M., Le Compte, M.D., & Goetz, J.P., (1986). Ethnographic and qualitative research design and why it doesn't work. *American Behavioral Scientist, 30*, 42-57. Doi: https://doi.org/10.1177/000276486030001006

Brinberg, D., & McGrath, J.E. (1985). *Validity and the research process*. In D. Brinberg (Ed.). Beverly Hills, California: Sage Publications, Incorporated. Web Site: https://www.mdthinducollege.org/ebooks/statistics/Validity_and_the_Research_Process.pdf

Brown, P.A. (2008). A Review of the literature on case study research. *Canadian Journal for New Scholars in Education, 1*(1), 1-13. Web Site: https://journalhosting.ucalgary.ca/index.php/cjnse/article/view/30395

Campbell, J.L., Quincy, C., Osserman, J., & Pedersen, O.K. (2013). Coding in-depth semistructured interviews problems of unitization and intercoder reliability and agreement. *Sociological Methods & Research, 42*, 294-320. Doi: https://doi.org/10.1177/0049124113500475

Capistran, R.W. (2005). *Concepts of the chain rule for first term calculus: A comparison across students, instructors, and professors*. Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Minnesota, Minneapolis, USA. Web Site: https://primo.lib.umn.edu/permalink/01UMN_INST/ijl1rs/alma9920420300001701

Carlson, M.P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378. Doi: https://doi.org/10.2307/4149958

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Franke, M.L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20. Web Site: https://www.jstor.org/stable/1001789

Chick, H.L., & Baker, M.K. (2005). Investigating teachers' responses to student misconceptions. In H.L. Chick, & J.L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, July 10-15, (Vol. 2, pp. 249-256). Melbourne, Australia. Web Site: https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2ChickBaker.pdf

Chu, C.G. (2019). *Investigation of student understanding of implicit differentiation*. Unpublished Master Thesis. The Graduate School University of Maine, Maine, USA. Web Site: https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/3074

Clark, J.M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D.J., John, D.S., … Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345-364. Doi: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Cochran, K.F., DeRuiter, J.A., & King, R.A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, *44*(4), 263-272. Doi: https://doi.org/10.1177/00224871 93044004004

Cohen, D.K., McLaughlin, M.W., & Talbert, J.E. (1993). *Teaching for understanding: Challenges for policy and practice*. San Francisco: Jossey-Boss. Web Site: https://www.wiley.com/enus/Teaching+for+Understanding%3A+Challenges+for+Policy+an+Practice-p-9781555425159

Cottrill, J.F. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions*. Unpublished Doctoral Dissertation. Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA. Web Site: https://purdue.primo.exlibrisgroup.com/permalink/01PURDUE_PUWL/ufs51j/alma99142810980001081

Creswell, J.W., & Poth, C.N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions* (4th Edition). California: Sage Publication. Web Site: https://www.google.com.tr/books/edition/Qualitative_Inquiry_and_Research_Design/DLbBDQAAQBAJ?hl =tr&gbpv=0

Cropley, A.J. (2019). *Introduction to qualitative research methods: A practice-oriented introduction*. Riga, Latvia: Zinātne. Doi: https://doi.org/10.13140/RG. 2.1. 3095.6888

Curry, L.A. (2004). The effects of self-explanations of correct and incorrect solutions on algebra problem-solving performance. In K. Forbus, D. Gentner & T. Regier (Eds.). *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society*. August 4-7, (pp. 1548). Chicago, Illinois, USA. Web Site: https://cognitivesciencesociety.org/wp-content/uploads/2019/01/CogSci04.pdf

Davidowitz, B., & Potgieter, B. (2016). Use of the rasch measurement model to explore the relationship between content knowledge and topic-specific pedagogical content knowledge for organic chemistry. *International Journal of Science Education, 38*(9), 1483-1503. Doi: https://doi.org/10.1080/09500693.2016.1196843

Dawkins, P.C., & Epperson, J.A.M. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(6), 839-862, Doi: https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.884645

De Jong, O., & Van Driel, J. (2004). Exploring the development of student teachers' pck of the multiple meanings of chemistry topics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 477-491. Doi: https://doi.org/10.1007/s10763-004-4197-x

Deblois, L. (2006). Influence des interprétations des productions des èlèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 307-329. Web Site: http://www.jstor.org/stable/25472104

Demirci, Ö., Özkaya, M., & Konyalıoğlu, A.C. (2017). The preservice teachers' mistake approaches on probability. *Erzincan University Journal of Education Faculty, 19*(2), 153-172. Doi: https://doi.org/10.17556/erziefd.310667

Didiş, M.G., Erbaş, A.K., & Çetinkaya, B. (2016). Investigating prospective mathematics teachers' pedagogical approaches in response to students' errors in the context of mathematical modeling activities. *Elementary Education Online, 15*(4), 1367-1384. Doi: http://dx.doi.org/10.17051/io.2016.75429

Didiş, M.G., Erbaş, A.K., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., & Alacacı, C. (2016). Exploring prospective secondary mathematics teachers' interpretation of student thinking through analysing students' work in modelling. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 349 378. Doi: https://doi.org/10.1007/s13394-016-0170-6

Didiş-Kabar, M.G., & Amaç, R. (2018). Investigating pre-service middle-school mathematics teachers' knowledge of student and instructional strategies: An algebra case. *Bolu Abant Izzet Baysal University Journal of Faculty of Education, 18*(1), 157-185. Doi: https://doi.org/10.17240/aibuefd.2018..-359810

Duran, M., & Kaplan, A. (2016). High school teachers' pedagogical content knowledge on defination of derivative, and relationship between derivative and continuity. *Erzincan University Journal of Education Faculty, 18*(2), 795-831. Doi: https://doi.org/10.17556/jef.68600

Durkaya, M., Aksu, Z., Öçal, M.F., Şenel, E.Ö., Konyalıoğlu, A.C., Hızarcı, S., … Kaplan, A. (2011). Secondary school mathematics teachers' approaches to students' possible mistakes. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 2569-2573. Doi: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.147

Engelke-Infante, N.M. (2007). *Students' understanding of related rates problems in calculus*. Unpublished Doctoral Dissertation. Arizona State University, Tempe, Arizona, USA. Web Site: https://search.lib.asu.edu/permalink/01ASU_INST/pio0a/alma991019585209703841

Erskine, B.M. (2010). *Raising mathematical achievmement starts with the elementary teacher: recommendations to improve content and pedagogical knowledge of elementary math teachers*. Unpublished Doctoral Dissertation.

University of Delaware, Newark, Delaware, USA. Web Site:https://delcat.primo.exlibrisgroup.com/permalink/01UDEL_INST/1sm7l75/cdi_proquest_journals_759770685

Even, R., & Markovits, Z. (1995). Some aspects of teachers' and students' views on student reasoning and knowledge construction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 26*(4), 531-544. Doi: https://doi.org/10.1080/0020739950260407

Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 1-20. Doi: https://doi.org/10.1007/BF01273897

Fang, Z. (1996). A review of research on teacher beliefs and practices. *Educational Research, 38*(1), 47- 64. Doi: https://doi.org/10.1080/0013188960380104

Gedik, S.D. (2014). *Effect of mistake-handling activities to mathematics content knowledge development process.* Unpublished Doctoral Dissertation. Atatürk University, Erzurum, Turkey. Obtained from the Council of Higher Education National Thesis Center. (Thesis Number: 381620). Web Site: https://tez.yok.gov.tr/

Gordon, S.P. (2005). Discovering the chain rule graphically. *Mathematics and Computer Education, 39*(3), 195-197. Web site: https://studylib.net/doc/15941841/discovering-the-chain-rule-graphically

Gürbüz, R., Yıldırım, İ., & Doğan, M.F. (2021). The effect of using erroneous example on the achievement of some statistical concepts of 7th grade students. *Journal of Computer and Education Research, 9*(18), 997-1021. Doi: https://doi.org/10.18009/jcer.976155

Graeber, A.O. (1999). Forms of knowing mathematics: What preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 189-208. Doi: https://doi.org/10.1023/A:1003624216201

Große, C.S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning & Instruction, 17*(6), 612-634. Doi: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Hare, A., & Philippy, D. (2004). Building mathematical maturity in calculus: Teaching implicit differentiation through a review of functions. *The Mathematics Teacher, 98*(1), 6-12. Doi: https://doi.org/10.5951/MT.98.1.0006

Hassani, S. (1998). *Calculus students' knowledge of the composition of functions and the chain rule*. Unpublished Doctoral Dissertation, State University, Illinois, USA. Web Site: https://i-share-isu.primo.exlibrisgroup.com/permalink/01CARLI_ISU/kt5co6/alma998888466605845

Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in german mathematics classroom. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psy-*

chology of Mathematics Education, July 10-15, (Vol. 3, pp. 105-112). Melbourne, Australia. Web Site: https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3Heinze.pdf

Heinze, A., & Reiss, K. (2007). Mistake-handling activities in the mathematics classroom: Effects of an in-service teacher training on students' performance in geometry. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, July 8-13, (Vol 3, pp. 9-16), Seoul, South Korea. Web Site: http://www.emis.de/proceedings/PME31/3/9.pdf

Heo, D. (2019). *Learning transfer in the differentiation using the chain rule and its relationship to motivation and performance*. Unpublished Doctoral Dissertation. Purdue University Graduate School, West Lafayette, Indiana, USA, Web Site: https://doi.org/10.25394/PGS.11310521.v1

Hill, H.C., & Ball, L.D. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351. Doi: https://doi.org/10.2307/30034819

Hines, E., & McMahon, M.T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105. Doi: https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from the inside-out: The relationship between the chain rule and function composition. In M. Zandieh (Ed.). *Proceedings of the 11th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)*. February 28-March 2, San Diego, California, USA. Web Site: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=7e56e29376573506134f88fa237a20c3508d1ca7

Jacobs, V.R., Lamb, L.L, & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. Web Site: https://www.jstor.org/stable/20720130

Jeppson, H.P. (2019). *Developing understanding of the chain rule, implicit differentiation, and related rates: Towards a hypothetical learning trajectory rooted in nested multivariation*. Unpublished Master Thesis. Brigham Young University, Provo, Utah, USA. Web Site: http://hdl.lib.byu.edu/1877/etd12247

Jones, S.R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior, 45*, 95-110. Doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002

Kahan, J.A., Cooper, D.A., & Bethea, K.A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 223-252. Doi: https://psycnet.apa.org/doi/10.1023/A:1025175812582

Kakoma, L., & Makonye, J.P. (2010). Learner misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia, 3*(3), 45-56. Doi: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1056125.pdf

Kandeel, R.A.A. (2021). Learners' common errors in implicit differentiation: An analytical study. *Journal of Educational Research and Reviews, 9*(7), 198-207. Doi: https://doi.org/10.33495/jerr_v9i7.21.125

Käpyla, M., Heikkinen, J.P., & Asunta, T. (2009). Influence of content knowledge on pedagogical content knowledge: The case of teaching photosynthesis and plant growth. *International Journal of Science Education, 31*(10), 1395-1415. Doi: https://doi.org/10.1080/09500690802082168

Konyalıoğlu, A.C. (2013). Investigation of pre-service mathematics teachers' geometry content knowledge in terms of error approach. *Journal of Kazım Karabekir Education Faculty, 27*, 45-62. Web Site: https://dergipark.org.tr/tr/pub/ataunikkefd/issue/2786/37414

Lannin, J.K., Barker, D.D., & Townsend, B.E. (2007). How students view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 43-59. Doi: https://doi.org/10.1007/s10649-006-9067-8

Leiß, D., & Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-Mathematics Education, 37*(3), 240-245. Web Site: https://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm053a15.pdf

Levin, D.M., & Richards, J. (2010, Ocak). Exploring how novice teachers learn to attend to students' thinking in analyzing case studies of classroom teaching and learning. In Gomez, K., Lyons, L., & Radinsky, J. (Eds.). *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences* (Vol 1, pp. 41-48). June 29-July 2, Chicago, Illinos, USA. Web site: https://repository.isls.org/bitstream/1/2701/1/41-48.pdf

Lincoln, Y.S., & Guba, E.G. (1985). Establishing trustworthiness. *Naturalistic inquiry, 289*(331), 289-327. Doi: https://doi.org/10.1016/0147-1767(85)90062-8

Lutzer, C.V. (2003). Using motion to teach chain rule and u-substitution. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 13*(1), 47-54. Doi: https://doi.org/10.1080/10511970308984045

Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education, 33*(1), 146-164. Doi: https://doi.org/10.15700/saje.v33n1a458

Martin, N.K., Yin, Z., & Mayall, H. (2006, February). Classroom management training, teaching experience and gender: Do these variables impact teachers' attitudes and beliefs toward classroom management style ?. *Paper presented at the Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association*, Austin, Texas, USA. Web Site: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED494050.pdf

Martin, T. (2000). Calculus students' ability to solve geometric related-rates problems. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 74-91. Doi: https://doi.org/10.1007/BF03217077

Martino, A.M., & Maher, C.A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53-78. Doi: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00017-6

Maxwell, J.A. (2012). *A realist approach for qualitative research*. Thousand Oaks, California: Sage Publication Inc. Doi: https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

McLaren, B.M., Adams, D., Durkin, K., Goguadze, G., Mayer, R.E., Rittle-Johnson, … Velsen, M.V. (2012). To err is human, to explain and correct is divine: A study of interactive erroneous examples with middle school math students. In A. Ravenscroft, S. Lindstaedt, C. Delgado Kloos, & D. Hernández-Leo (Eds.). *7th European Conference on Technology Enhanced Learning*. September 18-21, (pp. 222-235), Berlin, Germany. Doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33263-0_18

McLaren, B. M., Adams, D. M., & Mayer, R. E. (2015). Delayed learning effects with erroneous examples: A study of learning decimals with a web-based tutor. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 25*(4), 520-542. Doi: https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/s40593-015-0064-x

McMillan, H.J., & Schumacher, S. (2010). *Research in education: Evidence based inquiry*. Boston: Pearson Education Incorporated. Web site: https://eric.ed.gov/?id=ED577250

Meel, D.E. (2003). Prospective teachers' understandings: Function and composite function. *School Teachers: The Journal, 1*, 1-12. Web Site: http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/meel01/article.pdf

Melis, E. (2004). Erroneous examples as a source of learning in mathematics. In Kinshuk, D.G. Sampson & P. Isaias (Eds.). Proceedings of the IADIS International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (pp. 1-9). Lisbon, Portugal. Web Site: https://www.iadisportal.org/celda-2004-proceedings

Mercer, C.D., Mercer, A.R., & Pullen, P.C. (2013). *Teaching students with learning problems*. (8th Edition). London: Pearson New International Edition. Web Site: https://www.google.com.tr/books/edition/Teaching_Students_with_Learning_Problems/bUmpBwAAQBAJ?hl=tr

Merriam, S.B., & Grenier, R.S. (2019). *Qualitative research in practice: Examples for discussion and analysis* (2nd Edition). San Francisco: Jossey-Bass Publishers & Wiley. Web Site:https://www.google.com.tr/books/edition/Qualitative_Research_in_Practice/udWCDwAAQBAJ?hl=tr&gbpv=1&dq=Robin+Grenier&printsec=frontcover

Miles, M.B., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*: *An expanded sourcebook* (2nd Edition). London: Sage Publication, Incorporated. Web Site: https://vivauniversity.files.wordpress.com/2013/11/milesandhuberman1994.pdf

Mills, J., Bonner, A., & Francis, K. (2006). The development of constructivist grounded theory. *International Journal of Qualitative Methods, 5*(1), 1-10. Doi: https://doi.org/10.1177/160940690600500103

Mirin, A.C., & Zazkis, D. (2019). Making implicit differentiation explicit. In A. Weinberg, D. Moore Russo, H. Soto & M.Wawro (Eds.). *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 792–800). Oklahoma City, USA. Web Site: https://sigmaa.maa.org/rume/crume2019/Papers/135.pdf

Morrow, S.L. (2005). Quality and trustworthiness in qualitative research in counseling psychology. *Journal of Counselling Psychology, 52*(2), 250-260, Doi: https://doi.org/10.1037/0022-0167.52.2.250

Morse, J. M. (1994). Designing funded qualitative research. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of qualitative research* (pp. 220-235). Thousand Oaks: Sage Publication. Web Site:https://books.google.com.tr/books/about/Handbook_of_Qualitative_Research.html?id=u8hpAAAAMAAJ&redir_esc=y

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 1-10. Web Site: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1054301.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved from the Web Site: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGAC & CCSSO]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers. Retrieved from the Web Site: https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

National Math and Science Initiative [NMSI]. (2014). *Mathematics: chain rule "M&M's"*. Dallas, Texas: NMSI Press. Retrieved from the Web Site: https://maththewongway.weebly.com/uploads/5/1/2/6/5126774/chain_rule_m_ms_1.pdf

Neuman, W.L. (2014). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches* (7th Edition). Essex: Pearson Publishing. Web Site:https://letrunghieutvu.yolasite.com/resources/w-lawrence-neuman-social-research-methods_-qualitative-and-quantitative-approaches-pearson-education-limited-2013.pdf

Nyaumwe, L.J. (2008). Zimbabwean high school teachers "interpretations of learners" alternative conceptions on selected baseline test items on calculus and trigonometry concepts. *The Mathematics Educator, 11*(1), 181-196. Web Site: https://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/journal/v11_12/v11_181.aspx

Queensland Curriculum & Assessment Authority [QCAA]. (2014). *Mathematics senior subjects*. South Brisbane, Queensland: QCAA Press. Retrieved from the Web Site: https://www.qcaa.qld.edu.au/senior/subjects/mathematics

Özkaya, M. (2015). *A study on the impact of mistake-handling activities on mathematics teachers' professional development.* Unpublished Doctoral Dissertation, Atatürk University, Erzurum, Turkey. Obtained from the Council of Higher Education National Thesis Center. (Thesis Number: 418259). Web Site: https://tez.yok.gov.tr/

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332. Doi: https://doi.org/10.3102/00346543062003307

Park, J.H., & Lee, K.H. (2016). How can students generalize the chain rule? The roles of abduction in mathematical modeling. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(9), 2331-2352. Doi: https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1289a

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd edition). Thousand Oaks, California: Sage Publication Inc. Web Site: https://aulasvirtuales.files.wordpress.com/2014/02/qualitative-research-evaluation-methods-by-michael-patton.pdf

Puspita, E., Suryadi, D., & Rosjanuardi, R. (2023). Learning obstacles of prospective mathematics teachers: A case study on the topic of implicit derivatives. *Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif, 14*(1), 174-189. Web Site: https://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/kreano/article/view/42805

Putnam, R.T., Heaton, R.M., Prawat, R.S., & Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fifth-grade teachers. *The Elementary School Journal, 93*(2), 213-228. https://doi.org/10.1086/461723

Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: Effects of teachers' training on students' attitudes towards and their individual use of errors. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 8*(1), 21-30. Doi: https://doi.org/10.30827/pna.v8i1.6122

Rohde, U.L., Jain., G.C., Poddar, A.K., & Ghosh, A.K. (2012). *Introduction to differential calculus: Systematic studies with engineering applications for beginners.* (1st Edition). New Jersey: John Wiley & Sons, Incorporated. Doi: https://doi.org/10.1002/9781118130155

Rushton, S.J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(4), 1-12. Doi: https://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y

Santagata, R., & Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: evidence from a video-and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*, 491-514. Doi: https://doi.org/10.1007/s10857-013-9263-2

Sapire, I., Shalem, Y., Wilson-Thompson, B., & Paulsen, R. (2016). Engaging with learners' errors when teaching mathematics. *Pythagoras-Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa, 37*(1), 1-11. Doi: https://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.331

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Doi: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silverman, D. (2013). *Doing qualitative research: A practical handbook* (4th Edition). In K. Metzler (Ed.). Thousand Oaks: Sage Publication.

Siyepu, S.W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 577-592. Doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.001

Siyepu, S.W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education, 2*, 1-16. Doi: https://doi.org/10.1186/s40594-015-0029-5

Sneyd, J., Fewster, R.M., & McGillivray, D. (2022). Implicit differentiation. In *Mathematics and Statistics for Science* (pp. 325-329). Cham, Switzerland: Springer. Doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-05318-4_16

Son, J.W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70. Doi: https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Son, J.W., & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics, 110*(1), 31-46. Web Site: https://link.gale.com/apps/doc/A219578803/AONE?u=googlescholar&sid=bookmark AONE&xid=e5a58709

South Australian Certificate of Education-Board of South Australia [SACE Board of SA]. (2009a). *Annual report*. Adelaide, South Australia: SACE Board of South Australia Press. Retrieved from the Web Site: https://www.sace.sa.edu.au/documents/652891/549afced-07a0-4889-9845-5825e8f5f941

South Australian Certificate of Education-Board of South Australia [SACE Board of SA]. (2009b). *Curriculum statement 2009*. Adelaide, South Australia: SACE Board of South Australia Press. Retrieved from the Web Site: https://www.sace.sa.edu.au/

Speer, N., & Kung, D. (2016). The complement of RUME: What's missing from our research? In T. Fukawa-Connelly, N. Infante, M. Wawro, & S. Brown (Eds.). *Proceedings of the 19th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education*. February 25-27, (pp. 1288-1295). Pittsburgh, Pennsylvania, USA. Web Site: https://sigmaa.maa.org/rume/crume2016/Papers/RUME_19_paper_86.pdf

Stewart, J. (2012). *Calculus*: *early transcendentals* (7th Edition). Mason, Ohio: Brooks & Cole Cengage Learning. Web Site: https://patemath.weebly.com/uploads/5/2/5/8/52589185/james-stewart-calculus-early-transcendentals-7th-edition-2012-1-20ng7to-1ck11on.pdf

Stratton, D.H. (2021). Negative transfer in implicit differentiation. *International Journal of Educational Research Open, 2*, 1-7. Doi: https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2021.100051

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In C. Gaulin, B.R. Hodgson, D.H. Wheeler, & J.C. Egsgard (Eds.). *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematics Education* (pp. 13-28). Quebec, Canada. Web Site: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf

Tall, D., & Razali, M.R. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 209-222. Doi: https://doi.org/10.1080/0020739930240206

Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J., & Giordano, F.R. (2009). *Thomas calculus* (11th edition). (Trans.: R. Korkmaz). İstanbul: Beta Press Distribution. (Original Air Date, 2005).

Thoo, J.B. (1995). Composition and the chain rule using arrow diagrams. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 5*(3), 291-295. Doi: https://doi.org/10.1080/10511979508965794

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25. Doi: https://doi.org/10.2307/749817

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 51-64. Doi: https://doi.org/10.1023/A:1003011913153

Tokgöz, E. (2012). Numerical method/analysis students' conceptual derivative knowledge. *International Journal of New Trends in Education and Their Implications, 3*(4), 118-127. Web Site: https://www.ijonte.org/FileUpload/ks63207/File/11.tokgoz1.pdf

Tsamir, P. (2007). When intuition beats logic: prospective teachers' awareness of their same sides-same angles solutions. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 255-279. Doi: https://doi.org/10.1007/s10649-006-9053-1

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2005). In-service elementary mathematics teachers' views of errors in the classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 27*, 30. Web Site: https://www.semanticscholar.org/paper/In-Service-Elementary-Mathematics-Teachers%27-Views-Tsamir-Tirosh/f3443d34c51d6951ae57a280f83bd6c273705d53

Wanjala, E.K., & Orton, A. (1996). Teachers' knowledge of pupils' errors in algebra. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. July 8-12, (Vol 4, pp. 411-418). Valencia, Spain. Web Site: https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/

Watkins, C., & Mortimore, P. (1999). Pedagogy: what do we know. In P. Mortimore (Ed.). *Understanding Pedagogy and Its Impact on Learning* (pp. 1-20). London: Paul Chapman Publishing. Doi: https://doi.org/10.4135/9781446219454

Wilson, P.H., Lee, H.S., & Hollebrands, K.F. (2011). Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 39-64. Doi: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.1.0039

Wilson, P.H., Mojica, G.F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior 32*, 103-121. Doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

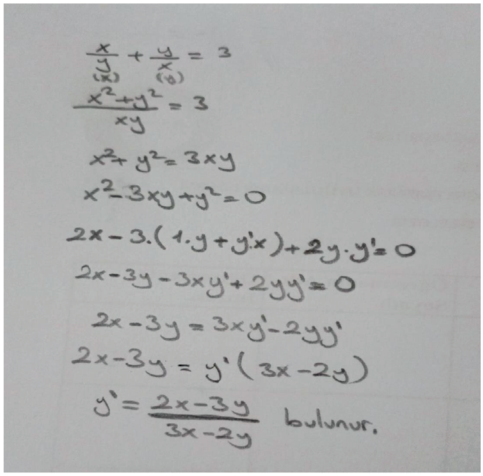
Yetkin, E. (2003). *Student difficulties in learning elementary mathematics*. In ERIC Digest. Colombus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education. Retrieved from the Web Site: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED482727.pdf

Ek-1. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Hata Temelli Senaryo-I / (HTS_1)

Ali öğretmen kapalı fonksiyonun türevi konusunda, derste anlattıklarının iyi öğrenilip öğrenilmediğini belirlemek üzere 12.sınıfta okuyan öğrencisi Ayşe'ye aşağıdaki soruyu sormuştur.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \text{ olduğuna göre } y' = ?$$

Ayşe, Ali öğretmene cevabı yazılı şekilde aşağıdaki gibi vermiştir.



$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$

$\frac{x^2+y^2}{xy} = 3$

$x^2 + y^2 = 3xy$

$x^2 - 3xy + y^2 = 0$

$2x - 3.(1.y + y'x) + 2y.y' = 0$

$2x - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$

$2x - 3y = 3xy' - 2yy'$

$2x - 3y = y'(3x - 2y)$

$y' = \frac{2x-3y}{3x-2y}$ bulunur.

Bir an için sizin Ayşe'nin öğretmeni olduğunuzu düşünelim.

1-) Ayşe'nin kapalı fonksiyonun türevi sorusuna yönelik yukarıdaki cevabı sizce hatalı mıdır?

2-) Ayşe'nin cevabının hatalı olduğunu düşünüyorsanız verilen cevap temelinde yatan sorunun kaynağını açıklayabilir misiniz?

3-) Ayşe'nin soruya verdiği cevabın hatalı olduğunu fark etseydiniz ona nasıl bir dönüt verirdiniz? Ayşe'nin yaptığı hatanın giderilmesine yönelik nasıl bir çözüm önerisinde bulunursunuz?

Ek-2. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Hata Temelli Senaryo-II / (HTS$_2$)

Mehmet öğretmen kapalı fonksiyonun türevi konusunda, derste anlattıklarının iyi öğrenilip öğrenilmediğini belirlemek üzere 12.sınıfta okuyan öğrencisi Aslı'ya aşağıdaki soruyu sormuştur.

$$\sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x+\cdots}}}} = x \text{ olduğuna göre } y' = ?$$

Aslı, Mehmet öğretmene cevabı yazılı şekilde aşağıdaki gibi vermiştir.

$$\sqrt{y+\sqrt{x+\underbrace{\sqrt{y+\sqrt{x+\cdots}}}_{x}}} = x \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\sqrt{y+\sqrt{x+x}} = x \quad \text{yazılır.}$$

$$\sqrt{y+\sqrt{2x}} = x$$

$$x^2 = y+\sqrt{2x}$$

$$x^2 - y = \sqrt{2x}$$

$$(x^2-y)^2 = 2x$$

$$x^4 - 2x^2y + y^2 = 2x$$

$$(x^4 - 2x^2y - 2x + y^2)' = 0$$

$$4x^3 - 2.(2x.y + 1.x^2) - 2 + 2y = 0$$

$$4x^3 - 4xy - 2x^2 - 2 + 2y = 0$$

$$4x^3 - 2x^2 - 2 = 4xy - 2y$$

$$y(4x-2) = 4x^3 - 2x^2 - 2$$

$$y = \frac{4x^3-2x^2-2}{4x-2} \quad \text{bulunur.}$$

Bir an için sizin Aslı'nın öğretmeni olduğunuzu düşünelim.

1-) Aslı'nın kapalı fonksiyonun türevi sorusuna yönelik yukarıdaki cevabı sizce hatalı mıdır?

2-) Aslı'nın cevabının hatalı olduğunu düşünüyorsanız verilen cevap temelinde yatan sorunun kaynağını açıklayabilir misiniz?

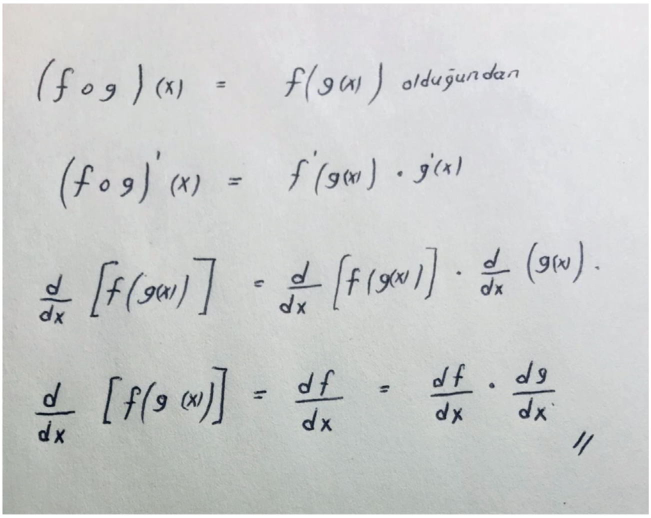
3-) Aslı'nın soruya verdiği cevabın hatalı olduğunu fark etseydiniz ona nasıl bir dönüt verirdiniz? Aslı'nın yaptığı hatanın giderilmesine yönelik nasıl bir çözüm önerisinde bulunursunuz?

Ek-3. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Hata Temelli Senaryo-III / (HTS_3)

Derya öğretmen kapalı fonksiyonun türevi konusunda, derste anlattıklarının iyi öğrenilip öğrenilmediğini belirlemek üzere 12.sınıfta okuyan öğrencisi Can'a bileşke fonksiyonun türeviyle ilgili aşağıdaki soruyu sormuştur.

$f: R \rightarrow R$ ve $g: R \rightarrow R$ tanımlı, $\forall x \in R$ için birer fonksiyon olsunlar. $(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$ şeklinde bileşke fonksiyon verilmiştir. Buna göre bu bileşke fonksiyonun türevini nasıl ararsınız? Çözümünüzü gösteriniz.

Can, Derya öğretmene cevabı yazılı şekilde aşağıdaki gibi vermiştir.



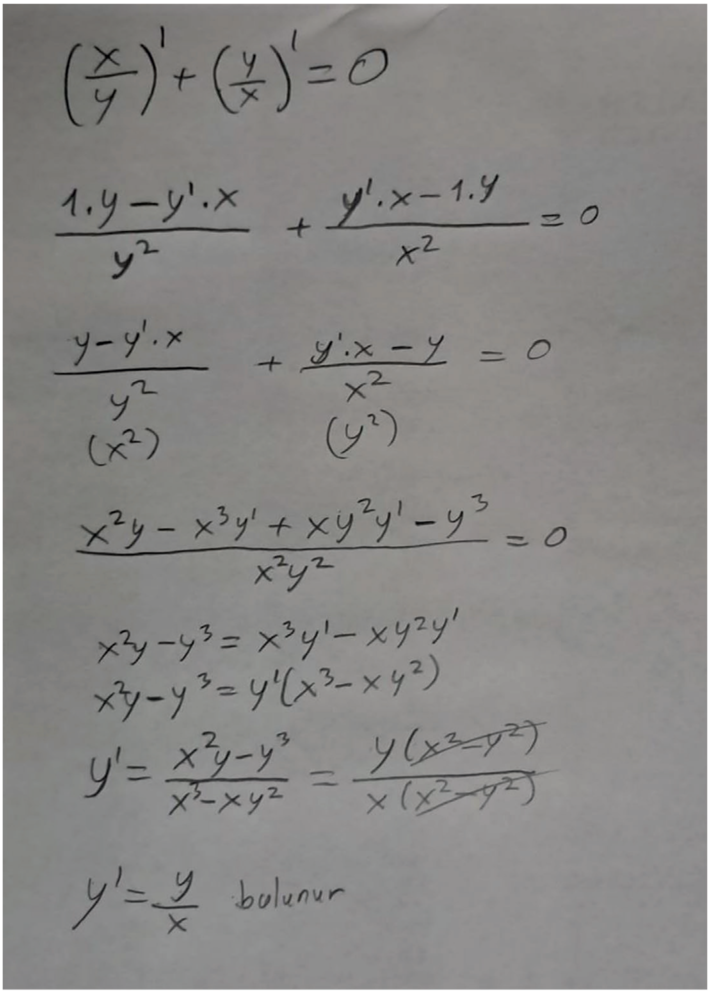
Bir an için sizin Can'ın öğretmeni olduğunuzu düşünelim.

1-) Can'ın bileşke fonksiyonun türevi sorusuna yönelik yukarıdaki cevabı sizce hatalı mıdır?

2-) Can'ın cevabının hatalı olduğunu düşünüyorsanız verilen cevap temelinde yatan sorunun kaynağını açıklayabilir misiniz?

3-) Can'ın soruya verdiği cevabın hatalı olduğunu fark etseydiniz ona nasıl bir dönüt verirdiniz? Can'ın yaptığı hatanın giderilmesine yönelik nasıl bir çözüm önerisinde bulunursunuz?

Ek-4. Hata Temelli Senaryo-I / (HTS$_1$) içerisindeki soruya yönelik doğru çözüm



$$\left(\frac{x}{y}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)' = 0$$

$$\frac{1.y - y'.x}{y^2} + \frac{y'.x - 1.y}{x^2} = 0$$

$$\underset{(x^2)}{\frac{y - y'.x}{y^2}} + \underset{(y^2)}{\frac{y'.x - y}{x^2}} = 0$$

$$\frac{x^2y - x^3y' + xy^2y' - y^3}{x^2y^2} = 0$$

$$x^2y - y^3 = x^3y' - xy^2y'$$

$$x^2y - y^3 = y'(x^3 - xy^2)$$

$$y' = \frac{x^2y - y^3}{x^3 - xy^2} = \frac{y\cancel{(x^2 - y^2)}}{x\cancel{(x^2 - y^2)}}$$

$y' = \frac{y}{x}$ bulunur

Ek-5. Hata Temelli Senaryo-II / (HTS$_2$) içerisindeki soruya yönelik doğru çözüm

$\sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x+\dots}}}} = x$ ise

$$\sqrt{y+\sqrt{x+\underbrace{\sqrt{y+\sqrt{x+\dots}}}_{x}}} = x$$

$\sqrt{y+\sqrt{x+x}} = x$ yazılabilir.

$\sqrt{y+\sqrt{2x}} = x$ olduğundan her tarafın karesini alalım.

$\left(\sqrt{y+\sqrt{2x}}\right)^2 = x^2$ ve $y+\sqrt{2x} = x^2$ bulunur.

$\sqrt{2x} = x^2-y$ olacağından her tarafın yine karesini alalım.

$$(\sqrt{2x})^2 = (x^2-y)^2$$

$$2x = (x^2)^2 - 2.x^2.y + y^2$$

$2x = x^4 - 2x^2y + y^2$ yazılır. İfadeyi bir tarafta toplayalım.

$2x^2y - y^2 - x^4 + 2x = 0$ Eşitlikte her tarafın x'e göre türevini alalım.

$$\frac{d}{dx}(2x^2y) - \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\left(y.\underbrace{\frac{d}{dx}(2x^2)} + \frac{d(y)}{dx}.2x^2\right) - \left(\frac{d(y^2)}{dy}.\frac{dy}{dx}\right) - 4x^3 + 2 = 0$$

$$y.4x + 2x^2.\frac{dy}{dx} - 2y.\frac{dy}{dx} - 4x^3 + 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}.(2x^2-2y) = 4x^3 - 4xy - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3-4xy-2}{2x^2-2y} = \frac{\cancel{2}.(2x^3-2xy-1)}{\cancel{2}.(x^2-y)} = \frac{2x^3-2xy-1}{x^2-y}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3-2xy-1}{x^2-y} \quad //$$

Ek-6. Hata Temelli Senaryo-III / (HTS_3) içerisindeki soruya yönelik doğru çözüm

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ olduğundan

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \frac{d(f(g(x)))}{d\,g(x)} \cdot \frac{d(g(x))}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Ek-7. Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Hataları Karşısında Sergileyecekleri Farklı Öğretim Yaklaşımlarına Yönelik Kategoriler ve Kodlar

KATEGORİLER	KODLAR	DAVRANIŞLAR-EYLEMLER
Açıklama & Gösterme	• Soruyu açıklama • Doğruyu Açıklama • Yanlışı Gösterme	• Soruda verilenleri ve istenilenleri söyleme • Bir örnek/gösterim kullanarak veya işlemsel bir çözüm ile doğru çözümü açıklama • Doğrudan yanlışını gösterme
Bilgi Sunma	• Konuyu/kavramı yeniden öğrenme	• Öğrencide eksik gördüğü konuyu/kavramı yeniden öğretme
Fark Ettirme	• Doğru düşünceyi/çözümü fark ettirme • Öğrencinin yanlışını fark ettirme	• Günlük hayat problemi ile düşündürerek doğruyu fark ettirme • Örtük türevi sözel şekilde ifade ederek doğruyu fark ettirme • Sonucun kontrolü ile yanlışı fark ettirme • Örnek üzerinden çelişki yaratarak yanlışı fark ettirme • Sorular aracılığıyla öğrenci düşüncesini anlayarak doğru çözümü veya öğrencinin yanlışını fark ettirme
Düşünceyi Anlama veya İleri Taşıma	• Öğrenci düşüncesini anlama veya öğrenci düşüncesini ileri taşıma	• Sorular aracılığıyla öğrenci düşüncesini açığa çıkarma veya üzerinde düşündürme • Sorular aracılığıyla öğrenci düşüncesini ileri taşıma