OYUN TEORİSİ

Strateji ve Karar Mekanizmaları

Doç. Dr. Mehmet POLAT • Prof. Dr. Yusuf AKAN

ÖZGÜR
YAYINLARI

OYUN TEORİSİ
Strateji ve Karar Mekanizmaları

Doç. Dr. Mehmet POLAT
Prof. Dr. Yusuf AKAN

ÖZGÜR
YAYINLARI

Published by
Özgür Yayın-Dağıtım Co. Ltd.
Certificate Number: 45503

15 Temmuz Mah. 148136. Sk. No: 9 Şehitkamil/Gaziantep
+90.850 260 09 97
+90.532 289 82 15
www.ozguryayınlari.com
info@ozguryayinlari.com

OYUN TEORİSİ
Strateji ve Karar Mekanizmaları
Doç. Dr. Mehmet Polat • Prof. Dr. Yusuf Akan

Language: Turkish
Publication Date: 2024
Cover design by Mehmet Çakır
Cover design and image licensed under CC BY-NC 4.0
Print and digital versions typeset by Çizgi Medya Co. Ltd.

ISBN (PDF): 978-975-447-903-4

DOI: https://doi.org/10.58830/ozgur.pub461

Suggested citation:
Polat, M., Akan, Y., (2024). *Oyun Teorisi Strateji ve Karar Mekanizmaları.* Özgür Publications.
DOI: https://doi.org/10.58830/ozgur.pub461. License: CC-BY-NC 4.0

The full text of this book has been peer-reviewed to ensure high academic standards. For full review policies, see https://www.ozguryayinlari.com/

ÖZGÜR
YAYINLARI

Ön Söz

Oyun teorisi, stratejik düşüncenin matematiksel temellerini inceleyen bir disiplindir. Bu alan, bireylerin veya grupların çıkarlarını maksimize etmek amacıyla aldıkları kararları anlamak ve modellemek için kullanılan analitik araçları sunar. Oyun teorisi, başlangıçta ekonomi ve politik bilimler gibi sosyal bilimlerde kullanılsa da, zamanla biyoloji, bilgisayar bilimi, mühendislik ve felsefe gibi farklı alanlarda da geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bu disiplin, özellikle rekabet, müzakere, ittifak kurma ve kaynak dağılımı gibi konularda kritik öneme sahiptir. Örneğin, ekonomi alanında piyasa dinamiklerinin anlaşılmasında, biyolojide evrimsel stratejilerin tespitinde, siyaset bilimlerinde uluslararası ilişkiler ve savaş stratejilerin belirlenmesinde ve bilgisayar bilimlerinde algoritmik karar verme süreçlerinde oyun teorisinin katkıları büyüktür. Bu geniş uygulama alanı, oyun teorisinin teorik derinliğini ve pratik faydasını açıkça ortaya koymaktadır.

Doktora tezinden üretilip ve genişletilen bu kitap, oyun teorisinin temel kavramlarını ve uygulamalarını detaylı bir şekilde ele almayı amaçlamaktadır. Oyun teorisinin karmaşık matematiksel temelleri ve çeşitli modelleri, okuyucuların rahatça anlayabileceği bir biçimde sadeleştirilmiş ve örneklerle zenginleştirilmiştir. Kitabın hedef kitlesi, oyun teorisine ilgi duyan ve bu alanda derinlemesine bilgi edinmek isteyen akademisyenler, araştırmacılar ve öğrencilerden oluşmaktadır. Amacımız, okuyuculara stratejik düşünme becerilerini geliştirme ve karmaşık etkileşimlerin ardındaki temel dinamikleri anlama konusunda güçlü bir temel sunmaktır.

Günümüz dünyasında, kararlar nadiren izole bir ortamda alınır. Genellikle, bir kişinin ya da kuruluşun eylemleri, başkalarının kararlarından etkilenir ve bu da karmaşık bir etkileşim ağını doğurur. Oyun teorisi, bu tür durumları analiz etmek ve optimal stratejiler geliştirmek için güçlü araçlar sağlar. Oyun teorisi, bireylerin ve toplulukların karar alma süreçlerindeki stratejik etkileşimlerin derinlemesine anlaşılmasını sağlar. Bu nedenle, bu kitapta sunulan bilgilerin ve analizlerin okuyuculara sadece teorik bir perspektif kazandırmakla kalmayıp, aynı zamanda günlük yaşamlarında ve kariyerlerinde stratejik düşünme yeteneklerini geliştirmelerinde de yararlı olacağına inanmaktayız.

Sonuç olarak, oyun teorisinin geniş ve büyüleyici dünyasına adım atacak olan siz değerli okuyucularımıza bu yolculukta başarılar diliyoruz. Bu kitabın, oyun teorisinin zengin dünyasını keşfetmenize yardımcı olmasını ve stratejik düşünme yeteneğinizi geliştirerek size yeni ufuklar açmasını temenni ediyoruz.

Doç. Dr. Mehmet POLAT

Iğdır-2024
Iğdır Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü
E-mail: mehmetpolat@igdir.edu.tr
Orcid No: 0000-0002-6930-1499

Prof. Dr. Yusuf AKAN

Erzurum-2024
Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü
E-mail: yusufakan@atauni.edu.tr
Orcid No: 0000-0002-2446-5043

İçindekiler

Tablolar Listesi

Şekiller Listesi

BİRİNCİ BÖLÜM

OYUN TEORİSİNE GİRİŞ

1.1. Oyun Teorisinin Tarihçesi

Oyun teorisi, ilk olarak 1921 yılında matematikçi Émile Borel tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, oyun teorisinin kökenleri 18. yüzyıla kadar uzanmaktadır. Hem iktisatçı hem de matematikçi olan Antoine Augustin Cournot, 1830'lu yıllarda eksik rekabet piyasası türleri üzerine analizler yapmıştır (Uçan ve Aytekin, 2013). Cournot, 1838 yılında yayımladığı "*Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*" adlı eserinde, iki firmanın piyasa üzerindeki rekabetini matematiksel olarak modelleyerek oyun teorisinin temellerini atmıştır. Ayrıca, Cournot, düopol modeli analizinde Nash dengesine benzer çözüm yöntemleri kullanmıştır (Cournot, 1838; Schwalbe, 2001). Her ne kadar Cournot, iktisada oyun teorisinin akıl yürütme metodunu getirmiş olsa da, bu metodun kullanımı sınırlı kalmıştır (Arrow, 2003).

1913 yılında Ernest Zermelo, satranç oyunları üzerine yaptığı çalışmada, satranç oyununun tam bilgi altında iki kişili sıfır toplamlı bir oyun olduğunu ifade etmiştir. Zermelo, ayrıca dinamik oyunların çözüm yöntemlerinden biri olan sondan başa doğru tümevarım yöntemini ortaya koymuştur (Schwalbe, 2001). Diğer yandan modern oyun teorisinin kurucusu olarak kabul edilen matematikçi John von Neumann, 20. yüzyılın ortalarında yaptığı çeşitli çalışmalarla bu alana önemli katkılarda bulunmuştur. Von Neumann, poker, satranç ve briç gibi oyunlarda rakiplerin stratejilerini modellemek ve rasyonel seçim stratejileri geliştirmek üzerine yoğunlaşmıştır. Özellikle 1928 yılında yayımlanan "*On the Theory of Games of Strategy*" adlı makalesinde, iki kişili sıfır toplamlı oyunlarda her oyuncu için birçok strateji bulunduğunu belirtmiştir (Eichberger, 1997). Bu çalışmasında, oyuncuların karşılıklı etkileşimlerini ve stratejik davranışlarını matematiksel olarak analiz etmiştir.

Von Neumann, Oskar Morgenstern ile birlikte 1944 yılında kaleme aldıkları "*The Theory of Games and Economic Behavior*" adlı eserle oyun teorisine önemli bir ivme kazandırmıştır. Bu eser, oyun teorisinin temel kavramlarından biri olan "çatışma" kavramını matematiksel bir çerçevede ifade etmiş ve teorinin iktisat bilimi ile entegrasyonunu sağlamıştır. Özellikle bu çalışma, oyun teorisinin sadece matematik ve ekonomi değil, aynı zamanda sosyal bilimlerin diğer alanlarında da uygulanabilirliğini göstermiş ve alanın genişlemesine öncülük etmiştir. Von Neumann ve Morgenstern'in bu eseri, stratejik etkileşimlerin ve karar verme süreçlerinin daha iyi anlaşılmasını sağlayarak, oyun teorisinin modern iktisat biliminin ayrılmaz bir parçası haline gelmesine katkıda bulunmuştur (Von Neumann ve Morgenstern, 1944).

Oyun teorisinde büyük öneme sahip olan John Nash, 1950'lerde oyun teorisine yaptığı katkılarla bu alanı önemli ölçüde genişletmiştir. Bu dönemde, oyun teorisi üzerine dört önemli makale kaleme almıştır. İlk iki makalesinde Cournot'un oligopol piyasaları üzerine çalışmalarına dayanarak, kendi adıyla anılacak olan Nash dengesini ortaya atmıştır. Bu bağlamda Nash 1950 yılında yayımladığı "*Equilibrium Points in N-Person Games*" ve 1951 yılında yayımladığı "*Non-Cooperative Games*" adlı çalışmalarında, rakiplerin işbirliğine yanaşmadığı oyunlarda Nash dengesine ulaşan stratejilerin varlığını ispatlamıştır. Nash'in diğer iki çalışması ise pazarlık teorisinin temellerini oluşturan "*The Bargaining Problem*" ve "*Two-Person Cooperative Games*" adlı makalelerdir. "*The Bargaining Problem*" adlı çalışmasında, iki taraf arasındaki pazarlık süreçlerini analiz etmiş ve Nash pazarlık çözümünü tanımlamıştır. "*Two-Person Cooperative Games*" adlı makalesinde ise iki kişili işbirlikçi oyunları incelemiş ve bu tür oyunların çözüm yöntemlerini tartışmıştır (Nash, 1950a, 1950b, 1951,1953; Şahin ve Eren, 2012).

1950'li yıllarda sağlam temellere oturan oyun teorisi, 1960'lı ve 1970'li yıllarda hızla genişlemiştir. Bu dönemin öne çıkan isimlerinden biri, stratejik çatışmalar ve koordinasyon oyunları üzerine yaptığı çalışmalarla tanınan Thomas Schelling'dir. Schelling'in "*The Strategy of Conflict*" adlı eseri, oyun teorisinin uluslararası ilişkiler ve askeri stratejiye uygulanabilirliğini göstermiştir (Schelling, 1960). Aynı dönemde, Reinhard Selten'in 1965 yılında geliştirdiği "mükemmel denge" kavramı ve John Harsanyi'nin 1967 yılında "eksik bilgi" için yaptığı çalışmalar, oyun teorisini doğal gelişim mecrasına oturtmuştur (Selten, 1965; Harsany, 1967). John Nash'in çalışmaları ışığında ilerleyen Reinhard Selten, Nash dengesini oyuncuların hareketlerini sırayla gerçekleştirdikleri dinamik oyunlara uyarlamış ve bu stratejiyi, oyunlarda uygulanabilir hale getirmiştir. Selten, oyuncuların gelecekte oyunu nasıl oynanacağına dair mantıklı bir metodoloji geliştirmiştir. Bu metodoloji, oyuncuların yaptıkları hamlelerin gelecekte nasıl sonuçlar doğuracağını düşünmelerini sağlaması açısından önemli bir gelişmedir (Çolak, 2017).

Oyun teorisi, 1970'lerde iktisatçıların "bilgi" konusunu önemsemeye başlamalarına kadar otonom bir şekilde ilerlemiştir. Bu dönemde, bireylerin eksik bilgiye sahip oldukları ve sınırlı derecede rasyonel oldukları dikkate alınarak iktisadi analizler yapılmaya başlanmıştır. Böylece, oyun teorisinin temelleri daha sağlam bir şekilde atılmıştır. Bu kavramlara zaman faktörünün eklenmesiyle, genel olarak iktisatta özel olarak ise oyun teorisinde önemli gelişmeler yaşanmıştır (Yılmaz, 2016).

Kreps ve Wilson, 1982 yılında "alt oyun mükemmel Nash dengesi" kavramını daha da ileriye taşıyarak, eksik bilgiye sahip dinamik oyunlar için "ardışık denge" kavramını geliştirmişlerdir. Aynı yıl, Rubinstein ise işbirliği içinde olan iki oyunculu pazarlık oyununu, işbirliğine yanaşmayan tam bilgiye sahip yaygın formdaki bir oyuna dönüştürmüştür. Bunu takiben, Kohlberg ve Mertens 1986'da bu oyunlardaki Nash dengeleri arasında bir seçim yapma yöntemi olarak "ileri çıkarım" terimini ortaya atmışlardır. Sonraki yıllarda, oyun teorisine çeşitli önemli kavramlar kazandırılmıştır: 1986'da Fudenberg ve Maskin "Folk teoremi"ni geliştirmiş, 1988'de Harsanyi ve Selten "denge seçimi" kavramını tanımlamış ve 1990'da Fudenberg ve Tirole "mükemmel Bayesyen dengesi"ni oyun teorisine dâhil etmişlerdir.

1980'li yıllardan itibaren oyun teorisi, büyük ilerlemeler kaydetmiştir. Bunun temel nedeni oyun teorisindeki önemli gelişmelerin yanı sıra, iktisadın makroekonomi yapılardan mikroekonomi analizlere kaymasıdır (Yılmaz, 2016). Bu süreçte, oyun teorisinin teorik temelleri derinleştirilmiş, yeni kavramlar geliştirilmiş ve çeşitli disiplinlerde geniş uygulama alanları bulmuştur. 2000'lerde, oyun teorisi deneysel ve davranışsal yaklaşımlarla zenginleştirilmiştir. Vernon Smith ve Daniel Kahneman gibi araştırmacılar, laboratuvar ortamlarında insanların oyun teorisi modellerine nasıl tepki verdiklerini incelemişlerdir. Smith (2003), deneysel ekonominin kurucularından biri olarak, insanların piyasa ve oyun teorisi deneylerinde nasıl davrandıklarını analiz etmiştir. Kahneman (2011), davranışsal ekonomi üzerine yaptığı çalışmalarla, rasyonel olmayan davranışların oyun teorisi modellerine nasıl entegre edilebileceğini göstermiştir. 2010'lar ve sonrasında, büyük veri ve bilişim teknolojilerinin gelişimi, oyun teorisinin uygulama alanlarını genişletmiştir. Algoritmik oyun teorisi ve mekanizma tasarımı, bu dönemde önemli araştırma konuları haline gelmiştir. Nisan ve Roughgarden (2004), algoritmik oyun teorisinin temellerini atarak, bilgisayar bilimleri ve ekonomi arasındaki etkileşimi artırmışlardır. Bu çalışmalar, internet ekonomisi, ağ teorisi ve sosyal medya analizleri gibi alanlarda geniş uygulama imkânları bulmuştur.

1.2. Oyun Teorisinin Tanımı ve Varsayımları

Oyun teorisi, sınırlı kaynakların ve belirli kuralların olduğu bir ortamda, iki veya daha fazla karar vericinin karşılıklı çelişen olasılıklar karşısında paylaşım süreçlerini inceleyen bir disiplindir (Uçan ve Aytekin, 2013). Bu disiplin, birden fazla ajanın bulunduğu ve bu ajanların kazançlarının birbirlerinin hamlelerine bağlı olduğu durumları analiz etmek için kullanılır (Yıldız, 2005). Oyun teorisi, ayrıca, oyuncular arasında çatışma ve işbirliği aşamalarını analiz eden matematiksel bir modeldir. Bu bağlamda, rasyonel olarak stratejik hareket eden bir grup arasındaki etkileşimi inceler ve sonucun, bağımsız rakiplerin kararlarına bağlı olduğu durumları ele alır. Hiçbir rakibin tek başına sonuçlar üzerinde tam kontrol sağlayamadığı bu karar alma teorisi, stratejik davranışların analizinde önemli bir araçtır (Karabacak, 2008).

Oyun teorisi, birden fazla rasyonel karar vericinin etkileşim içinde bulunduğu durumların analizine odaklanır. Bu teori, bireylerin aldıkları kararların, gruptaki diğer bireyleri de etkilediği karşılıklı bağımlılık durumlarını inceler. Karar vericilerin, kendi çıkarlarını maksimize etmeye çalışırken en uygun hamleleri yapmaları, oyun teorisinde "rasyonellik" olarak tanımlanır. Ayrıca, karar vericilerin iyi tanımlanmış dışsal hedeflere yönelerek, diğer oyuncuların bilgi ve beklentilerini dikkate alarak stratejiler geliştirmeleri, oyun teorisinin temel ilkelerindendir. Bu ilkeler, stratejik karar verme süreçlerinin analizinde kritik öneme sahiptir (Myerson, 1991; Osborne ve Rubinstein,1994; Brandenburger ve Nalebuff, 1995; Dutta, 1999) .

Stratejik etkileşim veya karşılıklı bağımlılık, bir kişinin bir grup içinde en az bir diğerini etkileyebilme durumunu ifade eder. Oyun kavramı ise bağımsız kararlar almanın problem haline geldiği durumlarda ortaya çıkar. Rakipler, kararlarının diğer tarafın durumunu nasıl etkileyeceğini bilerek hamlelerini planlarlar. Bu bağlamda oyun terimi, rakiplerin hamleleri ve bu hamlelerin sonuçları üzerinden tanımlanan kısıtların etkileşim alanını ifade eder. Bir oyunda denge ve çözüm ise belirli oyun gruplarında ortaya çıkan sonuçların sistematik olarak açıklanmasıdır. Genel olarak, oyun teorisi, oyun grupları içinde hem analitik hem de sezgisel çözüm önerileri geliştirir ve bu önerilerin özelliklerini inceler (Yılmaz, 2016).

Oyun Teorisi'nin genel varsayımları şunlardır:

- ✓ Oyun en az iki kişi arasında oynanmakla birlikte katılımcı sayısı oyunun niteliğine ve oyuncuların tercihine göre artabilir.
- ✓ Her bir oyuncu, kendi çıkarlarını en üst düzeye çıkaracak kararlar almaya çalışır.
- ✓ Strateji, oyuncuların hamlelerini belirleme özgürlüğüne sahip olduğu ve bu hamlelerin oyunun akışına, rakiplerin tutumuna ve diğer değişkenlere bağlı olduğu bir kavramdır.
- ✓ Oyuncuların rasyonel olduğu varsayılır, yani her oyuncu kendi faydasını maksimize etmeye çalışır. Bu, oyuncuların kararlarını tutarlı ve mantıklı bir şekilde verdikleri anlamına gelir. Her oyuncu, mevcut bilgiye dayanarak en iyi stratejiyi seçer.
- ✓ Oyuncular birbirlerine karşı bağımlıdır. Oyuncuların kararları birbirini etkiler. Bir oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların stratejilerine bağlıdır ve bu karşılıklı bağımlılık, oyun teorisinin analizinin merkezindedir.
- ✓ Oyun teorisinin temelini, kâr maksimizasyonu ve maliyet minimizasyonu oluşturur. Oyuncular, kendi getiri fonksiyonlarını maksimize etmeye çalışır. Her bir strateji kombinasyonu için oyuncuların alacakları getiri bilinir ve oyuncular bu getirilere göre stratejilerini belirler (von Neumann ve Morgenstern, 1944; Nash, 1950; Fudenberg ve Tirole, 1991; Political Science, 2018).

1.3. Oyun Teorisinde Temel Kavramlar

Oyun teorisinde dört temel unsur bulunmaktadır: oyuncular, stratejiler, oyun kuralları ve skorlar. Oyunlar genellikle en az iki kişi tarafından oynanır; bu oyunlar günlük sosyal etkileşimlerden başlayıp ekonomik kuruluşlara, devletlere ve uluslararası örgütlere kadar çeşitli düzeylerde gerçekleşebilir (Allan ve Dupont, 1999).

Stratejiler, oyuncuların karar verme süreçlerindeki seçenekleridir. Oyuncular her aşamada tercih edecekleri hareketleri belirleyerek strateji oluştururlar. Statik oyunlarda (oyuncular eş zamanlı hareket eder), her oyuncunun stratejisi tek bir hamle veya eylemi kapsar. Dinamik oyunlarda ise oyuncular ardışık olarak hareket eder. Stratejiler, rakibin veya rakiplerin tepkisini dikkate alarak tüm olası hamleleri içerebilir (Dixit vd., 1999). Diğer yandan stratejiler, saf (pür) ve karma (karışık) olarak sınıflandırılır. Saf stratejiler belirli bir eylemi net olarak içerirken, karma stratejiler belirli olasılıklar doğrultusunda hareket etmeyi içerir (Yılmaz, 2016).

Oyun kuralları ile stratejiler karıştırılmamalıdır. Her oyuncu, kendi stratejisini ve tercihlerini bağımsız olarak seçer. Strateji tutarlı olabilir veya olmayabilir ancak oyun kuralları kesin ve değişmezdir; bu kuralların ihlali durumunda oyun sona erer. Ayrıca bu kurallar, oyunun başlangıcında belirlenir ve oyuncular bu kurallara göre hareket ederler (Neumann ve Morgenstern, 1944).

Oyunun skorları, oyunun dinamiklerine ve ilerleyişine bağlı olarak değişiklik gösterebilir. Sonuçlar, oyuncular arasındaki iletişime, bilgi paylaşımına, güven seviyesine ve oyunun tekrarlanma sürecine bağlı olarak değişebilir. Ayrıca, oyuncuların işbirliği yapma istekleri, güç dengeleri (simetrik veya asimetrik), kazanma motivasyonları, işbirliği yapmanın maliyeti ve getirisi gibi faktörler de oyunun sonuçlarını etkileyebilir (Arı, 2013).

1.4. Oyun Teorisi-İktisat Teorisi İlişkisi

Oyun teorisi ve iktisat teorisi arasında derin bir ilişki bulunmaktadır. İktisat teorisi, ekonomik karar alma süreçlerini, kaynak dağılımını ve piyasa davranışlarını analiz ederken, oyun teorisi ise stratejik etkileşimleri, oyuncuların karar alma süreçlerini ve bu süreçlerin sonuçlarını inceler. Bu iki alan arasındaki ilişki, ekonomik ajanların (bireyler, firmalar, devletler vb.) kararlarını stratejik bağlamlarda nasıl verdiğini anlamak için önemlidir.

Oyun teorisi ve iktisat teorisi arasındaki ilişki, oyun teorisinin 1944'te John von Neumann ve Oskar Morgenstern tarafından yayımlanan "*The Theory of Games and Economic Behavior*" adlı eserle iktisat bilimine entegre edilmesiyle başlamıştır (Leonard, 2008; Núñez, 2022). Bu çalışma, stratejik etkileşimleri matematiksel bir çerçevede ele alarak, iktisadi davranışların ve karar süreçlerinin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Eserde, oyuncunun oyun sonundaki kazancını fayda teorisine, rasyonel olan bir oyuncunun her zaman en yüksek faydayı elde edecek seçimi yapmasını ise beklenen fayda maksimizasyonu teorisine bağlamıştır (Myerson, 1991). Bu çalışmayı takiben 1950'lerde John Nash'in "Nash dengesi" kavramını geliştirmesi, oyun teorisinin iktisat bilimindeki önemini daha da artırmıştır. Nash'in çalışmaları, rekabetçi ve işbirliğine dayalı olmayan oyunlarda denge durumlarını matematiksel olarak modellemiştir (Leonard,2008; Núñez, 2022).

Reinhard Selten ve John Harsanyi'nin 1960'lı ve 1970'li yıllardaki çalışmaları, oyun teorisinin eksik bilgi ve mükemmel denge gibi daha karmaşık durumlara uygulanabilirliğini ortaya koymuştur. Bu dönemde, Selten'in "titrek el mükemmelliği" ve Harsanyi'nin "Bayesci oyunlar" üzerine yaptığı çalışmalar, oyun teorisinin ekonomik modelleme ve analizdeki katkılarını önemli ölçüde genişletmiştir (Kandori, 2020; Núñez, 2022).

1970'lerden itibaren ekonomistler, oyun teorisinin iktisadi problemlerin yapısını anlamak ve çözmek için sunduğu olanakları keşfetmeye başlamışlardır. Oyun teorisinde özellikle asimetrik bilgi ve zaman (dinamik ve statik yapılar) kavramlarına yönelik önemli gelişmeler, iktisadi analizlere daha gerçekçi bir yapı kazandırmıştır. 1980'li yıllara gelindiğinde, oyun teorisi ana akım iktisadın ayrılmaz metotlarından biri haline gelmiştir. Bu bağlamda ekonometri, uygulamalı iktisadın en önemli yöntemlerinden biri olurken oyun teorisi ise mikro iktisadın temel metotlarından biri olmuştur (Yılmaz, 2016).

İktisat biliminin neredeyse tüm alanlarında, ekonomik aktörlerin stratejik davranışları büyük önem taşımaktadır. Oyun teorisi, iktisat teorisinin metodolojik bir alt disiplini olarak, toplumun bireyleri arasındaki karşılıklı ilişkileri rasyonel ve stratejik bir bakış açısıyla analiz etmek için bilimsel araçlar sunar. Bu yaklaşım, ekonomik olayları açıklamak ve ortak bir dil kullanmak için bir zemin sağlar. Günümüzde, endüstri iktisadından ekonomi politikası teorilerine kadar iktisat biliminin her alanında yapılan araştırmalar, oyun teorisinin sağladığı kavram ve yöntemlerden faydalanmaktadır (Çoban, 2003: 20).

Oyun teorisi, sunduğu metotlarla iktisatçıların makro iktisat ve mikro iktisat problemlerine bakış açısını değiştirmiştir. Bu bağlamda oyun teorisi metotlarının uygulandığı iktisat alanlarına "yeni" sıfatı eklenmektedir. Oyun teorisinin geleneksel iktisadi öğretiye uygulanması sonucu "Yeni Uluslararası İktisat" ve "Yeni Endüstriyel İktisat" kavramları gelişmiştir. Oyun teorisi metotlarının iktisada girmesiyle geleneksel iktisat teorisine yeni anlayışlar katılmıştır (Bekar, 2008).

Oyun teorisinin iktisat bilimi üzerindeki katkıları oldukça kapsamlı ve derindir. Oyun teorisi, iktisadi problemlerin analizinde ve çözümünde önemli bir araç haline gelmiştir. İşte bu katkıların bazıları:

- ✓ ***Pazar Rekabeti ve Oligopol Modelleri:*** Oyun teorisi, özellikle pazar rekabetini ve oligopol davranışlarını anlamada kritik bir rol oynamıştır. Cournot ve Bertrand gibi klasik oligopol modelleri, firmaların stratejik etkileşimlerini analiz etmek için oyun teorisi çerçevesinde incelenmiştir (Fudenberg ve Tirole, 1991; Marchionatti, 2024).
- ✓ ***Asimetrik Bilgi:*** Oyun teorisi, asimetrik bilgi durumlarında ekonomik kararların nasıl alındığını analiz eder. Akerlof'un "limonlar pazarı" ve Spence'in "işaretleme teorisi" gibi çalışmaları, asimetrik bilgi ile ilgili sorunların çözümünde oyun teorisinin kullanımını göstermektedir (Akerlof, 1970; Spence, 1973; Myerson, 1999; Marchionatti, 2024).

- ✓ ***Açık Artırmalar ve Piyasa Tasarımı***: Oyun teorisi, açık artırma teorisi ve piyasa tasarımı alanlarında da büyük katkılar sağlamıştır. Vickrey açık artırmaları ve daha karmaşık açık artırma formatları, oyun teorisi araçlarıyla optimize edilmiştir (Vickrey,1961).
- ✓ ***Endüstriyel Organizasyon***: Oyun teorisi, endüstriyel organizasyon analizinde geniş bir kullanım alanı bulmuştur. Rekabet stratejileri, pazar yapıları ve fiyatlandırma gibi konularda oyun teorik modeller kullanılmıştır. Kreps ve Wilson'ın "ardışık denge" teorisi bu bağlamda önemli bir gelişmedir (Kreps ve Wilson, 1982).
- ✓ ***Denge Kavramları:*** John Nash'in Nash dengesi, oyun teorisinin belki de en bilinen katkılarından biridir. Bu kavram, oyuncuların stratejik kararlar aldıkları ve her bir oyuncunun diğerlerinin stratejilerini dikkate alarak kendi stratejisini belirlediği durumlarda denge durumlarını tanımlar (Nash, 1950).
- ✓ ***Kooperatif Oyunlar***: Kooperatif oyun teorisi, oyuncuların koalisyonlar oluşturarak birlikte hareket ettiği durumları inceler. Shapley değeri ve çekirdek gibi kavramlar, kooperatif oyunlarda kaynakların adil dağılımını analiz etmek için kullanılır (Shapley, 1953; Marchionatti, 2024).

Bu katkılar, oyun teorisinin iktisat bilimi içinde giderek daha önemli bir yer edinmesine neden olmuştur. Oyun teorisi, ekonomik analizlerde stratejik etkileşimlerin incelenmesini mümkün kılarak, daha gerçekçi ve karmaşık ekonomik modellerin geliştirilmesini sağlamıştır.

1.5. Oyun Teorisi-Davranışsal İktisat İlişkisi

İktisat, sosyal bir bilim olarak zaman içerisinde farklı bilimlerin yöntemlerini kendi analizlerinde kullanmıştır. Bu yöntemler, iktisadı bazı bilimlere yakınlaştırırken bazı bilimlerden ise uzaklaştırmıştır. Örneğin iktisat, Walras'ın "*Éléments d'économie politique pure*" (Saf İktisadın Öğeleri) adlı eserini 1874 yılında yayımlamasından sonra fizik ve matematiğe daha çok yakınlaşmıştır (Walras, 1874). Böylece iktisat sosyolojiden uzaklaşmış ve psikolojik faktörleri göz ardı etmiştir. Bu dönemde ekonomistler analizlerinde insan faktörünü, akılcı olarak karar veren rasyonel bir birey olarak tanımlamışlardır. 20. yüzyılın ortalarına gelindiğinde ise ekonomistler, iktisadın sosyoloji ve psikoloji ile olan ilişkisini ele almışlardır (Dumludağ ve Ruben, 2015; Tüzel, 2019; Yiğit, 2018). İktisadın sosyoloji ve psikoloji ile yakınlaşması sonucu, davranışsal iktisat ortaya çıkmıştır. Özellikle davranışsal iktisat, Herbert Simon'un sınırlı rasyonellik teorisi ve Daniel Kahneman ile Amos Tversky'nin beklenti teorisi gibi çalışmalarla şekillenmiştir. Herbert Simon'un sınırlı rasyonellik kavramı, insanların ekonomik kararlarını tam bilgiye dayalı olarak değil, sınırlı bilgi ve işlem kapasitesiyle aldıklarını öne sürmüştür. Kahneman ve Tversky, insanların kararlarını alırken rasyonel olmadıklarını, çeşitli bilişsel yanılgılar ve sezgilere başvurduklarını savunmuşlardır (Miller, Amit, ve Posten, 2016).

Davranışsal iktisat, bireylerin bazen neden mantıksız kararlar aldığını ve davranışlarının neden tutarsız olduğunu anlamak amacıyla psikoloji ve iktisat disiplinlerinin birleşiminden oluşur (Ceylan, 2018). Bu alan, geleneksel iktisadi modelde tanımlanan rasyonel bireyin her zaman akılcı ve kendi çıkarlarına uygun davranamayacağını öne sürer (Erman, 2019). Davranışsal iktisat, sosyal, bilişsel ve duygusal faktörlerin bireylerin ekonomik kararlarını nasıl etkilediğini ve bu etkinin piyasa dinamikleri (fiyatlar, menfaatler ve kaynakların dağılımı) üzerindeki yansımalarını inceler. Örneğin, bir bireyin bir akıllı telefona ne kadar para harcayacağı, hangi arabayı seçeceği veya sağlıklı bir yaşam için ne kadar tasarruf yapacağı yalnızca ekonomi ile açıklanamaz. Davranışsal iktisat, bireylerin A kararı yerine neden B kararını verdiğini analiz etmeye çalışır (Azimzadeh, 2019).

Davranışsal iktisat ekonomik analizlerinde, varsayımlara dayalı geleneksel iktisadi modellerden ziyade deneysel yöntemlerle elde edilen ve sosyal hayat tecrübelerine dayanan veriler ışığında hareket eder (Erman, 2019). Bu alan, bireylerin ekonomik durumlarda nasıl kararlar aldığını araştırır ve davranışlarını etkileyecek politikalar geliştirir. Öte yandan oyun teorisi ise sonuçların, birbirinden bağımsız rakiplerin kararlarına bağlı olduğu ve tek bir rakibin sonuçlar üzerinde tam bir kontrol sağlayamadığı durumlarda olası sonuçları tahmin etmeye çalışır. Oyun teorisi, bireylerin rasyonel davrandığını varsayarken, davranışsal iktisat ise bireylerin her zaman akılcı ve kendi çıkarları doğrultusunda hareket etmediğini kabul eder (Taylor, 2016). Davranışsal iktisatçılar, deneylerinde oyun teorisinin modellerine sosyal tercihleri ekleyerek bireylerin davranışlarını açıklamaya çalışır. Ültimatom, diktatör ve kamu malı oyunları bu amaçla sıklıkla kullanılan araçlardır (Yavuzaslan, 2018). Oyun teorisi, davranışsal iktisadın önemli araçlarından biri olarak düşünülebilir ancak onun bir parçası değildir (Taylor, 2016).

Son dönemde davranışsal içgörülerin oyun teorisine entegrasyonu, davranışsal oyun teorisi olarak bilinen bir alt alanın ortaya çıkmasını sağlamıştır. Davranışsal oyun teorisi, klasik oyun teorisinin sınırlarını genişleterek, insan davranışlarını daha doğru tahmin etmeye yönelik çeşitli katkılar sağlamıştır. İşte bu teorinin temel katkılarından bazıları:

- ✓ ***Sosyal Tercihler ve Adalet***: Davranışsal oyun teorisi, bireylerin kararlarında sadece ekonomik kazançları değil aynı zamanda adalet, eşitlik ve sosyal normları da göz önünde bulundurduğunu ortaya koymuştur. Örneğin, Charness ve Rabin'in (2002) çalışmaları, bireylerin sosyal tercihlerinin ve adil davranışlarının oyunlardaki stratejik etkileşimlere olan etkisini incelemiştir.
- ✓ ***Öğrenme Modelleri***: Davranışsal oyun teorisi, bireylerin oyunlarda nasıl öğrendiğini ve stratejilerini zamanla nasıl geliştirdiğini açıklayan öğrenme modelleri geliştirmiştir. Bu modeller, tekrarlanan oyunlarda bireylerin davranışlarını anlamak için kullanılır. Camerer ve arkadaşlarının (2005) çalışmaları, öğrenme süreçlerini modellemede önemli katkılar sağlamıştır.
- ✓ ***Bilişsel Sınırlamalar:*** Bu teori, bireylerin bilişsel sınırlamalarının stratejik karar alma süreçlerine nasıl etki ettiğini incelemiştir. Costa-Gomes ve Crawford'un (2001) çalışmaları, bireylerin karmaşık stratejik oyunlarda nasıl düşündüğünü ve karar aldığını deneysel olarak göstermiştir.
- ✓ ***Referans Noktası Teorisi***: Kahneman ve Tversky'nin (1979) çalışmalarından esinlenen davranışsal oyun teorisi, bireylerin kararlarını geçmiş deneyimlerine ve beklentilerine göre nasıl değiştirdiğini açıklamak için referans noktası teorisini kullanır. Bu yaklaşım, bireylerin risk ve belirsizlik altında nasıl karar verdiklerini daha iyi anlamayı sağlar.
- ✓ ***Psikolojik Oyunlar:*** Geanakoplos, Pearce ve Stacchetti (1989), oyuncuların niyetlerini ve inançlarını stratejik etkileşimlerin analizine dâhil eden "psikolojik oyunlar" kavramını tanıtmışlardır.
- ✓ ***Adalet ve Karşılıklılık:*** Fehr ve Schmidt (1999), stratejik etkileşimlerde adalet ve karşılıklılığı hesaba katan modeller geliştirmiştir. Çalışmaları, oyuncuların eşitlik ve adalet kavramlarını değerlendirmelerinin, stratejilerini önemli ölçüde etkilediğini göstererek, tamamen çıkarcı ajan varsayımına meydan okumuştur.
- ✓ ***Lanetli Denge:*** Eyster ve Rabin (2005), oyuncuların diğerlerinin stratejilerini sistematik olarak yanlış algılamalarını ele alan "lanetli denge" kavramını tanıtmışlardır. Bu kavram, geleneksel ve davranışsal yaklaşımlar arasındaki boşluğu doldurmaktadır.

Davranışsal oyun teorisi, stratejik etkileşimlerde insan davranışını daha iyi anlamak için değerli bir araçtır. Davranışsal oyun teorisinin çeşitli uygulama alanları şunlardır:

- ✓ ***Pazar Tasarımı:*** Davranışsal içgörüler, gerçek insan davranışlarının teorik tahminlerden nasıl saptığını dikkate alarak daha iyi açık artırmalar ve pazarlar tasarlamaya yardımcı olur (Camerer, 2003; Goeree ve Holt, 2001).

- ✓ ***Kamu Politikası:*** Politikacılar, vergi uyumu, sağlık davranışları ve çevresel koruma gibi alanlardaki davranışları tahmin etmek ve etkilemek için davranışsal oyun teorisini kullanır (Falk ve Fischbacher, 2006).
- ✓ ***Organizasyonel Davranış***: Organizasyonlar içindeki stratejik etkileşimlerin, müzakereler ve teşvik yapıları dâhil olmak üzere, davranışsal içgörülerle anlaşılması noktasında fayda sağlar (Camerer, 2003; Gintis, 2009).
- ✓ ***Eğitim ve Öğrenme*****:** Oyunlar ve simülasyonlar, öğrencilerin stratejik düşünme ve karar verme yeteneklerini geliştirmelerine yardımcı olabilir. Bu, özellikle ekonomi ve işletme eğitimi alanlarında önemlidir (Chong vd., 2006).
- ✓ ***Sosyal ve Politik Araştırmalar*****:** Sosyal bilimlerde, davranışsal oyun teorisi, toplumun çeşitli kesimlerinde işbirliği ve rekabet dinamiklerini anlamak için kullanılır. Bu, topluluklar arası ilişkiler, grup davranışları ve toplumsal normlar üzerine yapılan araştırmaları içerir (Henrich vd., 2005).

1.6. Oyun Türleri

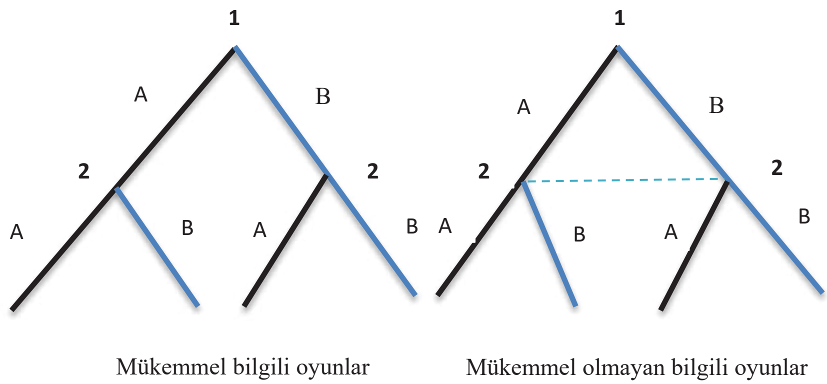
Oyun teorisi literatürüne geçmişten günümüze birçok oyun türü girmiştir. Bu oyunlar, oyununun kurallarından oyuncunun kazanımlarına, oyunun tekrar sayısından oyuncuların bilgi düzeyine, oyundaki zaman kavramından oyuncuların işbirliğine girip girmeme durumuna göre farklı şekillerde sınıflandırılmaktadır. Bu çalışmada, oyun teorisi literatürü göz önüne alınarak oyunların özelliklerine göre bir sınıflandırma yapılmıştır. Söz konusu bu sınıflandırma Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1'de görüldüğü gibi oyunlar, oyunun kurallarına ve oyuncunun genel durumuna göre farklılık arz etmektedir. Bu oyunları tek tek tanımlamak gerekirse bir oyunda oyun başlamadan evvel tüm oyuncular, hem kendi hem de diğer rakiplerin kazanç ya da kayıplarını biliyorsa bu tür oyunlara tam bilgili oyunlar denir (Ramusen, 1989). Yani her oyuncunun fayda fonksiyonu bilgisinin bütün rakipler tarafından biliniyor olmasıdır (Yılmaz, 2016). Satranç ve dama, bu tür oyunlara örnek gösterilebilir. Diğer yandan oyuncuların tam bilgiye sahip olmadığı ve belirsizlik koşulları altında karar verdiği oyunlara, eksik bilgili oyunlar denmektedir. Başka bir değişle, oyunculardan en az biri rakiplerinin oyun sonunda elde edebileceği kazanç ya da katlanabilecekleri maliyeti bilmiyorsa bu tür oyunlara ise eksik bilgili oyunlar denir (Ramusen, 1989). Harsanyi'nin geliştirdiği eksik bilgiye dayalı oyunlar, bu tür oyunları kapsamaktadır (Harsanyi, 1967).

Tablo 1. Oyun Türleri

Oyuncuların Bilgi Düzeyine Göre Oyunlar	Tam Bilgili Oyunlar Eksik Bilgili Oyunlar Mükemmel Bilgili Oyunlar Mükemmel Olmayan Bilgili Oyunlar
Zaman Kavramına Göre Oyunlar	Statik (Eş anlı) Oyunlar Dinamik (Ardışık) Oyunlar
Oyuncular Arasında İşbirliğinin Olup Olmamasına Göre Oyunlar	İşbirliği Yapılan Oyunlar İşbirliği Yapılmayan Oyunlar
Oyunun Sonunda Elde Edilen Kazanç ya da Katlanılan Maliyetlere Göre Oyunlar	Sıfır Toplamlı Oyunlar Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar
Oyunun Oynanma Sayısına Göre Oyunlar	Tekrarlanan Oyunlar Tekrarlanmayan Oyunlar
Diğer Oyunlar	İhaleler Pazarlık Teorisi

Oyuncuların stratejilerini sırayla seçtikleri ve rakiplerin önceki seçimlerini bildikleri veya hareket kümesini gözlemleyebildiği oyunlara mükemmel bilgili oyunlar denir. Diğer yandan oyuncuların diğer rakiplerin seçimlerini bilmeden tahmin ederek oynadığı oyunlara ise mükemmel olmayan bilgili oyunlar denmektedir (Kelly, 2003). Mükemmel bilgili oyunun her bilgi kümesinde bir eleman bulunur. Aksi takdirde bu, mükemmel olmayan bilgili oyun olur. Mükemmel bilgili oyunda, güçlü varsayımlar vardır. Her oyuncu, oyunun neresinde olduğunu bilir, oyunda hiçbir hareket eş anlı değildir ve tüm oyuncular hem doğanın hem de birbirinin hareketini gözlemler. Kesin bilgili oyun ise oyuncular oyuna başladıktan sonra doğanın hareket etmediği bir oyun türüdür. Yani oyun başladıktan sonra şans diye nitelendirebileceğimiz doğanın hiçbir hareketinin olmadığı bir oyun türüdür (Yılmaz, 2016).



Şekil 1. Mükemmel ve Mükemmel Olmayan Bilgili Oyunların Yaygın Form ile Gösterimi

Simetrik bilgili oyunlar, oyunculardan herhangi birinin hareket ettiği noktada sahip olduğu bilgi kümesinin diğer tüm oyuncuların bilgi kümesiyle aynı olduğu bir oyundur. Asimetrik bilgili oyun ise oyuncuların bilgi kümelerinin birbirinden farklı olduğu ve mükemmel bilgiye sahip olmadıkları oyun türüdür. Eksik bilgili oyun, bir oyunda bazı oyuncular tarafından bilinen bilgi, diğer oyuncular tarafından bilinmiyorsa bu tür bilgiye özel bilgi (private information) denir ve bu tür bilginin mevcut olduğu oyunlara ise eksik bilgili oyun denir (Montet ve Serra, 2003).

Statik oyunlar, oyuncuların strateji seçimlerini rakiplerin stratejilerini gözlemlemeden yaptıkları; dinamik oyun ise oyuncuların rakiplerin tercihlerini gözlemleyerek strateji seçiminde bulundukları oyunlardır (Karabacak, 2008). Dinamik oyunlarda, oyuncular sırayla hareket ederler ve her hareket, bir önceki hareketin sonucuna bağlıdır. Bu oyun türü, zaman içinde stratejilerin nasıl geliştiğini ve değiştiğini inceler. Rubinstein'ın müzakere modeli, bu oyun türüne bir örnektir (Rubinstein, 1982; Argoneto ve Renna, 2011).

İşbirlikçi oyunlar, oyuncuların belli müzakereler sonucunda, çatışan kazançların dengelenmesi ve toplam faydanın azami düzeye çıkarılması konusunda anlaştıkları oyunlardır. Bu tür oyunlarda, ortak hareket etmeye dönük anlaşmaların yasal olarak uygulanması ve tarafların ortak hareket etmesi için 3. bir gözlemciye ihtiyaç vardır. Bu oyunlarda, oyuncular aralarında bağlayıcı anlaşmalar yapabilir ve işbirliği yaparak ortak bir hedefe ulaşmaya çalışırlar. Bu oyunlar, kaynakların nasıl paylaşılacağı ve kazanımların nasıl dağıtılacağı üzerine odaklanır. Örneğin, koalisyon oluşturma teorileri bu kategoride incelenir (Kahan ve Rapoport, 1984; Dixit vd., 1999). Oyuncuların kendi aralarında sözleşme yapma imkânı bulamadıkları ve kendi çıkarları doğrultusunda hareket ettikleri oyunlara ise işbirliksiz ya da rekabetçi oyunlar denir (Dixit vd., 1999). Rekabetçi oyunlarda, her oyuncu kendi çıkarları doğrultusunda hareket eder ve işbirliği yapmaz. John Nash'in geliştirdiği Nash dengesi bu oyun türünde önemli bir kavramdır. Bu tür oyunlarda her oyuncu, diğer oyuncuların stratejilerini göz önünde bulundurarak kendi stratejisini optimize etmeye çalışır (Nash, 1950; Núñez, 2022).

Sıfır toplamlı oyunlar, oyun teorisinin önemli bir dalıdır ve bu tür oyunlarda bir oyuncunun kazancı, diğer oyuncunun kaybına eşittir. Sıfır toplamlı oyunlarda, oyuncuların oyun sonunda yapacakları ödemelerin toplamı sıfırdır. Bu da bir tarafın kaybettiği diğer tarafın kazandığı durumdur. Oyun sonucunda ödemelerin toplamının sıfırdan farklı olduğu oyunlar ise sıfır toplamlı olmayan oyunlardır. Bu oyunun kazananı ya da kaybedeni tek bir taraf değildir. Her iki taraf belli oranlarda hem kaybedebilir hem de kazanabilir (Yıldırım, 2006).

Dinamik oyunlar içinde en yaygın oyunlardan biri de tekrarlı oyunlardır. Bu tür oyunlarda hareketler, oyuncuların zaman içinde karşılıklı olarak oyunu sürekli olarak tekrar etmeleriyle gerçekleşir. Oyunun kuralları süreç boyunca hep aynıdır, değişen sadece tarihtir (Yılmaz, 2016). Ayrıca tekrarlanan oyunlar, oyuncuların uzun vadeli stratejik planlar yapmasına olanak tanır ve işbirliği, ceza ve ödül gibi dinamiklerin nasıl çalıştığını araştırır. Axelrod'un işbirliğinin evrimi üzerine yaptığı çalışmalar, bu alanda önemlidir (Axelrod, 1984; Argoneto ve Renna, 2011).

İKİNCİ BÖLÜM

TAM BİLGİLİ OYUNLAR

Oyuncuların muhtemel stratejilerinin ve fayda fonksiyonlarının, tüm oyuncular için ortak bilgi olduğu oyunlar, tam bilgili oyunlardır. Tam bilgili oyunlarda, her oyuncu tüm oyun bilgisine sahiptir. Bu durum, oyuncuların diğer oyuncuların ne tür kararlar alabileceğini ve bu kararların sonuçlarını tahmin etmelerini sağlar (Hayashi, 2021). Tam bilgili oyunlarda, oyuncuların stratejik kararları, diğer oyuncuların kararlarını dikkate alarak alınır. Bu oyunlarda, Nash dengesi önemli bir rol oynar. Nash dengesi, oyuncuların hiçbirinin stratejisini tek başına değiştirdiğinde daha iyi bir sonuca ulaşamayacağı durumu ifade eder (Basar ve Olsder, 1999). Bu oyunlar, deterministtik bir yapıya sahip olabilir. Yani, oyuncuların aldıkları kararlar ve bu kararların sonuçları kesin ve belirgindir. Herhangi bir belirsizlik veya rastgelelik durumu söz konusu değildir (Kuhn, 1953). Ayrıca tam bilgili oyunlarda zaman kavramı vardır. Oyuncuların aynı anda hareket ettiği oyunlara statik, sırayla hareket ettiği oyunlara ise dinamik oyun denir (Bonanno, 2015).

2.1. Tam Bilgili Statik Oyunlar

Statik oyunlar, oyuncuların aynı anda (eş anlı olarak) hareket ettikleri oyunlardır. Ancak kararların birlikte alınması gerekliğini doğurmaz, sadece birlikte alınıyormuş gibi farz edilir (Evyapan, 2009). Yani oyuncuların hareket etmeden önce rakibinin hareketini gözlemleyemediği durumdur. Diğer yandan tam bilgili statik oyunlarda bütün oyuncuların fayda fonksiyonları tüm rakipler tarafından bilinir (Yılmaz, 2016). Ayrıca bu tür oyunlar, normal ve yaygın form yardımıyla gösterilmektedir.

2.1.1. Oyunların Gösterim Biçimi

Normal form ya da stratejik biçimli form, oyunların matris yöntemiyle gösterilme biçimidir. Bu tür oyunlarda her bir rakip eş anlı olarak hareket eder ve rakiplerin seçtikleri strateji profili, her biri için bir fayda düzeyini gösterir (Gibbons, 1992).

Normal form üç temel unsurdan oluşur;

- Oyuncular kümesi; N={1,…,i,…n}, i burada herhangi bir oyuncuyu gösterir.
- Hareket kümesi; S_1 , S_2 ….. S_n , S stratejileri gösterir.
- Strateji profillerine karşılık gelen fayda düzeyleri; u_1, u_2...... u_n , u fayda düzeyini gösterir.

Tanım: N oyunculu bir oyununun stratejik biçimli gösterimi; oyuncuların stratejik kümeleri S_1 , ….. S_n ve fayda fonksiyonları u_1,...... u_n şeklinde oluşur. Oyun da G={ S_1 , ….. S_n; u_1,...... u_n} ile gösterilir (Yılmaz, 2016).

Tablo 2. N Oyunculu Bir Oyunun Stratejik Biçimli Gösterimi

	S_1 (C)	S_2 (D)
S_1 (C)	$U_1(S_1, S_1)$, $u_2(S_1, S_1)$	$U_1(S_1, S_2)$, $U_2(S_1, S_2)$
S_2 (D)	$U_1(S_2, S_1)$, $u_2(S_2, S_1)$	$U_1(S_2, S_2)$, $U_2(S_2, S_2)$

Kaynak: Yılmaz (2016: 9).

Tablo 2’de bulunan strateji kümesi ve fayda fonksiyonunun daha iyi anlaşılması için örnek olarak Mahkûmlar İkilemi oyunu verilmiştir.

Mahkûmlar İkilemi, oyun teorisinin en bilinen ve en çok çalışılan problemlerinden biridir. İlk olarak Merrill Flood ve Melvin Dresher tarafından RAND Corporation'da geliştirilmiş ve daha sonra Albert W. Tucker tarafından formüle edilmiştir (Osborne ve Rubinstein, 1994). Mahkûmlar İkilemi, iki kişinin (mahkûm) işbirliği yapıp yapmama kararını verdiği bir senaryoyu temel alır ve bu kararların sonucunda her iki tarafın da elde edeceği kazancı belirler (Axelrod, 1984). Bu oyunda, oyuncular birbirlerinin hareketlerini gözlemleyerek karar verme şansları yoktur. Sadece bir defaya mahsus olarak stratejilerini seçebilirler. Aynı zamanda bu oyun, işbirliksiz tam bilgili statik oyuna bir örnektir (Evyapan, 2009).

Oyuncular, iki tarafın da arzu edilmeyen bir duruma düşmemesi için işbirliği yapma zorunluluğu ile karşı karşıyadırlar. Fakat oyuncular arasında hiçbir şekilde iletişim olmaması ve taraflar arasında güvensizliğin hâkim olması, işbirliğinden kaçabilme riskini doğurmaktadır. Oyuncular bu riski göz önüne alarak oyunu oynamaktadırlar (Deusch, 1988). Bu oyunda, iki kişi çalmış oldukları malı paylaşırken polisler tarafından yakalanır. Fakat polisler bunları cezalandıracak kadar yeterli delile sahip değillerdir. Ancak, en az birinin suçu itiraf etmesi gerekmektedir. Polisler suçu itiraf etmeleri için bir mekanizma hazırlayarak iki suçluyu farklı hücrede tutarlar. Savcı da mahkûmların alacakları kararlar sonucunda katlanmaları gereken ceza hakkında bilgi verir (Gibbons, 1992).

Tablo 3. Mahkûmlar İkilemi Oyunun Stratejik Biçimli Gösterimi

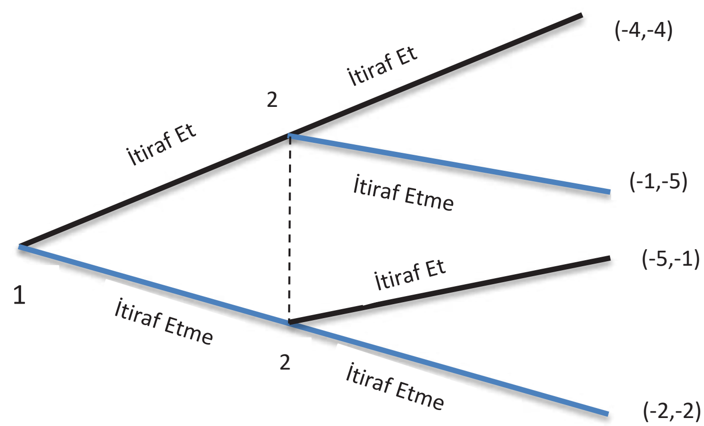
		2. Oyuncu	
		İtiraf Etme (C)	*İtiraf Et (D)*
1. Oyuncu	*İtiraf Etme (C)*	-2, -2	-5, -1
	İtiraf Et (D)	-1, -5	-4, -4

Kaynak: Gibbons (1992).

Tablo 3'te gösterildiği gibi mahkûmlardan birinin itiraf etmesi ve diğerinin itiraf etmemesi sonucu, itiraf eden 1 yıl ve itiraf etmeyen ise 5 yıl yatar. Her ikisi de itiraf ederse delile ihtiyaç kalmayacak ve mahkûmlar 4'er yıl yatacaklardır. Fakat her ikisi de itiraf etmezse suç ispatlanmayacak sadece çalıntı malı yanlarında bulundurmaktan dolayı 2'şer yıl yatacaklardır (Yılmaz, 2016). Mahkûmlar İkilemi, bireylerin kendi çıkarlarını maksimize etmeye çalıştıklarında bu tercihlerin kolektif olarak daha kötü sonuçlar doğurabileceğini gösterir. İki mahkûm da rasyonel olarak kendilerini korumak için diğerini ele verebilir ancak bu durumda her ikisi de daha uzun süreli cezalar alır (Osborne ve Rubinstein, 1994; Axelrod, 1984).

Oyun teorisinde, kullanılan bir diğer yöntem ise yaygın formdur. Yaygın formda ise oyun ağacı kullanılmaktadır. Oyun ağacı, rakiplerin tüm stratejileri ve oyunun bütün muhtemel sonuçlarını gösterir. Oyun ağacında, düğümler, dallar, kavşaklar ve en sonunda ise hareketlerin sonuçları vardır. Bu dalları birbirine bağlayan kavşaklar ise karar ve bitiş kavşakları olmak üzere ikiye ayrılır. Karar kavşağı, isminden anlaşıldığı gibi kararların alındığı noktalardır. Oyunun başlangıç noktası ilk karar noktasıdır. Her bir karar kavşağı, oyunu oynayacak kişi ile ilişkilidir ve sahibi bir kişi ya da bir gruptur. Bitiş kavşakları herhangi bir oyuncuya ait olmayıp, bitiş noktasını temsil etmektedir. Bitiş kavşağı, sonuç seti içerir. Sonuçlar da oyuncular tarafından elde edilen kazanç ya da katlanmak zorunda kalacakları maliyetleri gösterir (Karabacak, 2008).

Yaygın formda kararlar, eş anlı değil ardısal alınır. Bundan dolayı oyun bir matris yardımı ile değil oyun ağacı ile gösterilir. Yaygın formda; rakiplerin sayısı ve kimliği, rakiplerin hareket kararları, herhangi bir oyuncunun rakibin geçmiş kararlarından edineceği bilgi düzeyi, tekrar oynama sırası kazanan oyuncuya ait olası kararlar, oyun sonucunda elde edilecek kazanç veya kayıplar açıkça ifade edilir (Church ve Ware, 2000).



Şekil 2. Mahkûmlar İkilemi Oyununun Yaygın Form ile Gösterimi

Şekil 2'de Mahkûmlar İkilemi, oyun ağacı yöntemiyle gösterilmiştir. Oyun ağacının ilk karar noktasında 1. mahkûm karar vereceği için 1 ile gösterilmiştir. İlk düğümde, her iki kolda 1. oyuncu için hamleler tanımlanmıştır. 1. oyuncu ya itiraf edecek ya da itiraf etmeyecektir. Bu kolların sonunda ise 2. mahkûmun kararını gösteren düğümler mevcuttur. Dikkat edilirse 2. mahkûmun karar noktaları arasında çizgiler görülmektedir. Bu çizgiler, 2. mahkûmun 1. mahkûmun kararından habersiz olduğunu gösterir. Çizgi olmadığı durumda ise oyuncular birbirinin hamlelerini görebilir. Sonuç olarak 2. oyuncunun seçeceği hamle ile birlikte bitiş kavşağı setinde bulunan dört tane sonuçtan biri ile oyun bitecektir.

2.1.2. Pür Stratejilerde Kesin ve Zayıf Baskınlık

Oyun teorisinde stratejiler, saf (pür) ve karma olmak üzere ikiye ayrılır. Pür stratejiler, kesin ya da açık olarak oynanan stratejiler iken karma stratejiler ise belli olasılığa göre iki ya da daha fazla pür stratejinin arasında yapılır (Hargreavs-Heap ve Varoufakis, 2004).

Bir oyuncunun refahının diğer oyuncunun ya da oyuncuların hareketine bağlı olduğu durumda oyun teorisi yöntemleri akla gelir. Mahkûmlar İkilemi'nde görüldüğü gibi, sadece kendi hareketleri değil, aynı zamanda diğer mahkûmun hareketi de hapishanede ne kadar yatacağını belirlemede etkilidir (Börü, 2011).

Bir oyunda bir oyuncunun bir stratejisi, rakibinin ya da rakiplerinin tüm stratejileri için her zaman daha iyi sonuç verebiliyorsa buna kesin baskın ya da tam baskın strateji denir (Gibbons, 1992). Kesin baskınlık, bir stratejinin başka bir stratejiye her durumda üstün gelmesi anlamına gelir. Yani, bir oyuncu için bir strateji, diğer tüm olası stratejilere göre her zaman daha yüksek bir getiri sağlıyorsa, bu strateji kesin baskındır. Kesin baskın stratejilerin belirlenmesi, genellikle oyuncuların rasyonel kararlar almasına ve en iyi sonucu elde etmesine yardımcı olur (Fujiwara-Greve, 2015).

$G=\{S_1,\ldots,S_n ;u_1,\ldots,u_n\}$ stratejik biçimli bir oyunda, i oyuncusunun olası stratejileri s'_i ve s''_i ($s'_i, s''_i \in S_i$) olsun. Eğer diğer rakiplerin olası strateji profilleri için, i oyuncusunun s'_i elde ettiği fayda düzeyi, s'_i stratejisini oynamasından elde edeceği fayda düzeyinden kesin daha fazla ise s'_i stratejisine kesin baskın strateji denir. Fayda düzeyi ise $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1},\ldots,s_n)$ şeklinde ifade edilir. Burada $s_{-i}=(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\ldots,s_n)$, i oyuncusu dışındaki oyuncuların herhangi birinin strateji profilidir. i oyuncusu dışındaki oyuncular –i olarak ifade edilir. Yapmış olduğumuz tanımdan hareketle hiçbir zaman oyuncular tarafından oynanmayacak stratejiye de kesin mahkûm strateji denir (Yılmaz, 2016). Kesin baskın strateji, oyuncular için en yüksek faydayı sağlarken, kesin mahkûm strateji ise diğer stratejilere nazaran en düşük faydayı sağlar (Hargreavs-Heap ve Varoufakis, 2004).

Tablo 4'te iki oyunculu bir oyun verilmektedir. 1. oyuncunun A, B ve C hareketi bulunurken; 2. oyuncunun ise D, E ve F hareketi bulunmaktadır. 1. oyuncu herhangi bir kesin baskın stratejiye sahip değildir. 2. oyuncu F hareketini oynamadığı müddetçe 1. oyuncunun A hareketini oynaması B hareketini oynamaktan daha iyidir (bkz. Tablo 4-a). Diğer yandan 2. oyuncu F hareketini oynamadığı müddetçe, 1. oyuncunun A hareketini oynaması C hareketini oynamasından daha iyidir. Kısacası 1. oyuncunun yapacağı en iyi hareketler, 2. oyuncunun ne oynayacağına bağlıdır.

Tablo 4. Oyunun Sürekli Eliminasyon Yöntemi ile Çözümü

	D	*E*	*F*
A	5,4	6,2	7,3
B	3,2	9,5	4,7
C	6,10	10,6	3,9

(a)

	D	*F*
A	5,4	7,3
B	3,2	4,7
C	6,10	3,9

(b)

	D	*F*
A	5,4	7,3
C	6,10	3,9

(c)

	D
A	5,4
C	6,10

(d)

	D
C	6,10

(e)

2. oyuncunun F stratejisi, E stratejisine göre kesin baskın stratejidir. 1. Oyuncu hangi stratejiyi oynarsa oynasın, 2. oyuncunun E yerine F hareketini oynaması durumunda her zaman en yüksek faydayı elde edecektir. Örneğin 1. oyuncu A'yı seçerse 2. oyucunun E ve F hareketleri sırasıyla 2 < 3, 1. oyuncu B'yi seçerse 2. oyucunun E ve F hareketleri sırasıyla 5 < 7, ve 1. oyuncu C'yi seçerse 2. oyucunun E ve F hareketleri sırasıyla 6 < 9 olacaktır. Görüldüğü gibi 2. oyuncuya en yüksek faydayı, her zaman E'ye göre F verecektir. Yani rasyonel olan 2. oyuncu hiçbir zaman F varken E stratejisini oynamayacaktır. Sonuç olarak E stratejisi mahkûm bir strateji olduğu için elenir.

2. matrise bakıldığında; 1. oyuncunun A stratejisinin B stratejisine kesin baskın olduğu görülmektedir (bkz. Tablo 4-b). Çünkü 2. oyuncu D ve F hareketini oynadığında, sırasıyla 5 > 3 *ve* 7 > 4 olur ve her iki durumda da 1. oyuncu A hareketini oynayarak en yüksek faydayı elde etmiş olur. Diğer yandan 1. oyuncunun A stratejisi C'ye göre ne baskın ne de mahkûmdur. Bu bağlamda rasyonel 1. oyuncu, 2. oyuncunun rasyonel olduğunu bildiği için asla mahkûm stratejisi olan B'yi seçmeyecektir. Sonuç olarak mahkûm olan B stratejisi de elenir.

3. matrise bakıldığında; 2. oyuncunun D stratejisinin baskın, F stratejisinin ise mahkûm strateji olduğu görülmektedir (bkz. Tablo 4-c). Rasyonel olan 2. oyuncu F stratejisini oynamayacağından, F elenir.

4. matriste 1. oyuncunun C stratejisi baskın, A stratejisi ise mahkûm strateji olduğu için A stratejisi elenir (bkz. Tablo 4-d). Sonuç olarak son matriste görüldüğü gibi 1. oyuncu 6, 2. oyuncu ise 10 birimlik fayda elde eder (bkz. Tablo 4-e).

Oyunda her zaman mahkûm stratejiler olmayabilir. Oyuncunun bazı stratejileri diğer stratejilere nazaran daha yüksek fayda sağlarken bazı stratejiler ise eşit fayda sağlayabilir (Osborne ve Rubinstein, 1994). Oyuncu için bazen 'her zaman daha iyi' strateji yerine 'her zaman daha kötü değil' strateji söz konusu olabilir (Yılmaz, 2016). Bu stratejilere, zayıf baskın strateji denir. Zayıf baskınlık, bir stratejinin başka bir stratejiye en azından eşit olduğu ve en az bir durumda daha üstün olduğu strateji türüdür. Bu, belirli durumlarda iki stratejinin eşdeğer olabileceği, ancak bazı durumlarda birinin diğerinden daha iyi olduğu anlamına gelir. Zayıf baskın stratejiler, kesin baskın stratejilere göre daha az katı bir üstünlük sağlar (Munoz-Garcia ve Toro-Gonzalez, 2019).

$G=\{S_1,.......S_n;\ u_1,..........,u_n\}$ gibi stratejik biçimli bir oyunda, i oyuncusunun olası stratejileri s'_i ve $s''_i(s'_i, s''_i \in S_i)$ olsun. i oyuncusunun s'_i stratejisini oynamaktan elde ettiği fayda düzeyi, en az s'_i stratejisi kadar ise buna zayıf baskın denir. Bu durum şu şekilde gösterilir: $u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1},....,s_n) \leq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1},....,s_n)$ (Osborne ve Rubinstein, 1994).

Tablo 5'te görüldüğü gibi 1. oyuncu için C stratejisi A stratejisine kesin mahkûm olduğu için elenir ve D stratejisinin E'ye zayıf baskın olduğu bir oyun kalır. Bu durumda E elenirse A stratejisinin B'ye kesin baskın olduğu bir durum olur ve sonuç olarak B de elenerek 1. oyuncu 5, 2. oyuncu ise 4 birimlik fayda elde eder.

Tablo 5. Zayıf Mahkûm Stratejilerin Elenerek Sonucun Bulunması (1. Yol)

	D	*E*
A	5,4	4,4
B	3,3	2,2
C	2,2	3,3

(a)

	D	*E*
A	5,4	4,4
B	3,3	2,2

(b)

	D
A	5,4
B	3,3

(c)

	D
A	5,4

(d)

Tablo 6. Zayıf Mahkûm Stratejilerin Elenerek Sonucun Bulunması (2. Yol)

	D	*E*
A	5,4	4,4
B	3,3	2,2
C	2,2	3,3

(a)

	D	*E*
A	5,4	4,4
C	2,2	3,3

(b)

	E
A	4,4
C	2,2

(c)

	E
A	4,4

(d)

Tablo 6'da 2. çözüm yolu verilmektedir. Burada A stratejisi hem C'ye hem de B'ye kesin baskındır. Bu durumda B'yi eleyerek oyuna devam edilirse E stratejisinin D'ye zayıf baskın olduğu bir durum ortaya çıkar. Sonuç olarak sırayla oyuncular D ve C stratejisini elerse A ve E stratejiler kalır ve her iki oyuncu aynı faydayı elde eder.

Tablo 7. Zayıf Mahkûm Stratejilerin Elenerek Sonucun Bulunması (3. Yol)

	D	*E*
A	5,4	4,4
B	3,3	2,2
C	2,2	3,3

(a)

	D	*E*
A	5,4	4,4

(b)

	D
A	5,4

(c)

Tablo 7'de 3. çözüm yolu verilmektedir. Eğer 1. oyuncu, A stratejisinin kesin baskın olduğu B ve C'yi aynı anda elerse 2. oyuncu zayıf baskın olduğu stratejilerle karşı karşıya kalır. 2. oyuncu D stratejisini de E stratejisini de oynayabilir. Bu durumda 1. oyuncunun hangi mahkûm stratejisini önce sileceği, 2. oyuncunun tercihini belirleyecektir. Sonuç olarak A ve D stratejisi kalır.

2.1.3. Nash Dengesi

Oyun teorisinde oyunların çözümünde eşsiz bir çözüm sağlayan Nash dengesi, John Nash tarafından ortaya atılmıştır. 1994 yılında ise John Nash, bu çalışmasıyla Nobel ödülünü kazanmıştır (Tirole, 1989).

İktisatta, arz-talep eşitliğiyle oluşan piyasa dengesi büyük öneme sahiptir. Piyasa dengesi, dışsal bir faktör olmaması durumunda hiçbir aktörün davranışını değiştirmeme eğilimi içinde olmasından kaynaklanır. Günlük hayatta, davranıştaki "değişmeme" veya "düzenlilik" hali tahminlerimizin temelini oluşturur. Stratejik yapıların tahmini için düzenlilik hali kullanılabilir. Bu bağlamda insanların, faydalarını düşündükleri için rasyonel olduklarını ve diğer insanların davranışlarını gözlemlediklerini düşünüyoruz. Arz-talep eşitliğiyle oluşan piyasa dengesinde olduğu gibi stratejik yapılarda da rasyonel olarak sürdürülen davranış düzenliliğine denge diyebiliriz. İşte Nash dengesi de stratejik yapılardaki en önemli kavramlardan biridir (Yılmaz, 2016).

Oyun teorisinde en çok kullanılan kavramlardan biri Nash dengesidir. Nash dengesi oyunda istikrarlı bir durum yakalayarak her bir oyuncunun diğer oyuncuların rasyonel hareketleri ve davranışları hakkında doğru beklentilere sahip olmasını sağlar (Osborne ve Rubinstein, 1994).

Nash dengesinde rasyonel olan bir oyuncu, rakibinin hangi stratejileri oynamayacağı öngörüsünde bulunabilmenin yanı sıra, bir dengenin hangi özelliklere sahip olması gerektiğine dair soruları da cevaplamalıdır (Romp, 1997). Nash dengesinde her bir oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların stratejilerine karşı en iyi stratejidir (Fudenberg ve Tirole, 1991). Yani bir oyuncunun başka bir hamle yapması için başka bir nedeninin olmadığı durumdur (Ateş, 2018).

Herhangi bir oyunda Nash dengesi bulmak için iki yol izlenir (Evyapan, 2009):

1. Öncelikle her oyuncu kendi rakibinin veya rakiplerinin ne yapacaklarına dair optimal stratejiler belirleyerek strateji kombinasyonlarının tamamını diğer rakipler için tanımlamalıdır.
2. Bütün rakiplerin optimal stratejilerini eş anlı olarak belirlemesi gerekir.

Tanım: N oyunculu stratejik biçimli bir oyunda; $G=\{N, (S_i), (u_i)\}$, eğer her bir i oyuncusunun s_1^* stratejisi diğer (n-1) oyuncunun $(s_1^*,.....,s_{i-1}^*, s_{i+1}^*,....,s_n^*)$ stratejilerine en iyi tepkisi $s^*=(s_1^*, ..., s_n^*)$ ise strateji profili pür strateji Nash dengesidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*,....,s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^{"}, s_{i+1}^*,....,s_n^*) \quad \forall_i \in N, \forall si \in S_i$$

ya da kısaca;

$$u_i(s_i^*, ..., s_{i-1}^*) \geq u_i(s_i, ..., s_{i-1}^*,) \quad \forall_i \in N, \forall si \in S_i.$$

Bu durumda s_i^*, i oyuncusunun faydasını maksimize eden durumdur. Ayrıca bu da

$s_i^*=arg\max_{si \in Si} ui(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*,s_{i+1}^*,....,s_n^*)$ şeklinde formülize edilir.

Daha anlaşılır bir şekilde ifade edilirse $G=\{N, (S_i), (u_i)\}$ gibi bir oyunda oyunun $(s_1',..., s_n')$ strateji profili ile çözülebileceği farz edilsin. Eğer $(s_1',..., s_n')$ strateji profili Nash dengesi olmazsa i oyuncusunun s_i' stratejisi, $(s_1', ..., s_{i-1}', s_{i+1}',....,s_n')$ stratejilerine verilen en iyi tepki değildir ve i oyuncusu için daha yüksek fayda veren başka bir stratejisi $(s_i' \in S_i)$ vardır denilir ve bu durum da; $u_i(s_1', ..., s_{i-1}', s_i', s_{i+1}',....,s_n') < u_i(s_1', ..., s_{i-1}', s_i^{"}, s_{i+1}',....,s_n')$ şeklinde ifade edilir (Yılmaz, 2016; Gibbons, 1992).

Örnek: Tablo 8'de verilen örnekte sadece tek bir tane Nash dengesi vardır. Eğer 2. oyuncu C oynarsa 1. oyuncu B yerine A oynayarak faydasını daha da artırır. Aynı durumda eğer 2. oyuncu 1. oyuncunun A stratejisini sürdüreceğini düşünse hep C oynamaya devam eder. Bu durumda her iki oyuncunun birbirine karşı inançları tutarlı ve sonuç her ikisi için faydalıdır. Sonuç olarak (A,C) strateji profili Nash dengesidir denilebilir.

Tablo 8. İki Oyunculu Statik Oyunun Normal Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		C	D
1. Oyuncu	A	5,10	4, 4
	B	0, 4	5, 0

(A,D) strateji profili Nash dengesi olup olmadığına bakalım. 1. oyuncu, 2. oyuncunun D stratejisini oynadığını düşünürse A stratejisini oynamaktan vazgeçer ve onun için daha faydalı olan B stratejisini seçer. Aynı şekilde 1. oyuncu A stratejisini oynadığında, 2. oyuncu D stratejisinde kalmaz ve C stratejisini seçer. Sonuç olarak (A,D) stratejisi rasyonel değildir. Nash dengesinin baskın ve makul stratejiler arasındaki ilişkisi incelenecek olursa:

Önerme: n oyunculu stratejik biçimli G= $\{N, (S_i), (u_i)\}$ gibi bir oyunda, $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ stratejileri eğer Nash dengesi ise bu denge stratejileri oyundaki kesin baskın stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucu ulaşılmış denge stratejileridir.

İspat; Kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucu Nash dengesinin stratejilerinden birinin elendiği, sonra aksi bir durumun ortaya çıktığı ve Nash dengesinin elenen stratejisinin yanlış olduğu ispatlansın. N oyunculu stratejik biçimli G=$\{N, (S_i), (u_i)\}$ bir oyunda $(s_1', \ldots, s_n')$ stratejilerinin Nash dengesi olduğunu varsayalım. s_i^* stratejisi Nash denge stratejilerinden elenen ilk strateji olduğunu varsayalım. Bu durumda S_i strateji kümesinde daha elenmemiş s_i' stratejisi var ve bu s_i^* stratejisine kesin baskın bir stratejidir. Bu durum aşağıdaki gibi formülize edilir (Börü, 2011):

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n). \qquad (1)$$

Bu durum diğer rakiplerin strateji kümeleri içinden henüz elenmemiş stratejilerden elde edilmiş her $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$ strateji profili için doğrudur. Ama s_i^* stratejisi ilk elenen stratejilerden olduğu için, diğer rakiplerin denge stratejileri elenmediğinden dolayı şu anlama gelir:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*). \qquad (2)$$

Sonuç olarak s_i^* stratejisi $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ strateji profili için en iyi tepki olduğu için Nash dengesi tanımına uymaz. Bu bağlamda s_i' stratejisi, s_i^* stratejisine kesin baskın bir strateji olamaz (Yılmaz, 2016; Gibbons, 1992).

Önerme: Bu önermemizde ise kesin mahkûm olan stratejilerin elenerek bulunan baskın strateji dengesinin Nash dengesi olduğudur. n oyunculu stratejik biçimli $G=\{N, (S_i), (u_i)\}$ bir oyunda; kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucu ulaşılmış denge stratejileri $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ Nash dengesidir (Gibbons, 1992).

İspat: Bu önermenin ispatı için çelişkili ispatlama yöntemi kullanılır. İlk aşamada baskın stratejilerin elenmesi sonucu $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ stratejisinin kaldığı, ama bu stratejinin Nash dengesi olmadığı varsayılsın. Ayrıca i oyuncusu için Nash dengesi olan s_i^* stratejisi, başka bir strateji olan s_i tarafından mahkûm edilerek silindiği varsayılsın. Bu durum, daha formel olarak gösterilir:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \quad (3)$$

Diğer taraftan i oyuncusunun kalan stratejilerinden s_i' stratejisinin s_i stratejisini mahkûm ettiği varsayılır. Bu durumda:

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) \text{ olur.} \quad (4)$$

Gelinen bu aşamada bu sonuç diğer tüm oyuncuların strateji uzaylarından elde edilen her $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ strateji için geçerlidir. Diğer rakiplerin $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ stratejileri hiçbir şekilde elenemediği için yukarıda ifade edilen eşitsizlik şu şekilde yazılabilir:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \quad (5)$$

Şayet $s_i' = s_i^*$ ise yani s_i^*stratejisi eğer s_i stratejisini mahkûm ederse (5)'te belirtilen durum (3)'te belirtilen duruma tezattır ve sonuç biter. Fakat $s_i' \neq s_i^*$ ise bir sonraki aşamada s_i'' gibi bir strateji, s_i'(bu süreçte kalan strateji olmaz) stratejisini mahkûm eder. Diğer taraftan (4)'te ve (5)'te belirtilen eşitsizliklere benzer şekilde s_i ve s_i' yerlerine s_i' ve s_i'' stratejileri yazılabilir. Şayet $s_i''=s_i^*$ olursa ispat biter. Aksi durumda benzer şekilde iki tane daha eşitsizlik tanımlanabilir. Sonuç olarak elenmekten kurtulan tek strateji $s_i^* \in S_i$ stratejisi olduğu için ispat tamamlanmış olur (Gibbons, 1992).

2.1.4. Bazı Klasik Oyun Örneklerinde Pür Nash Dengesi

2.1.4.1. Cinsiyetler Savaşı Oyunu

Klasik bir oyun olan cinsiyetler savaşı, Nash dengesini daha iyi anlamak için kullanılan önemli örneklerden biridir. Bu oyun, bir erkek ve bir kadın arasında oynanmaktadır. Erkek boks maçına gitmek isterken, kadın bale gösterisini tercih etmektedir. Tercihleri farklı olmasına rağmen, birbirlerine duydukları sevgi nedeniyle, birbirlerinin tercihlerini kabul etmeye razı olan eşler söz konusudur. Bu durum, iki oyuncunun da birlikte vakit geçirmek istemesi nedeniyle ortaya çıkan stratejik bir etkileşim örneği olarak incelenir (Gintis, 2006).

Tablo 9. Cinsiyetler Savaşı Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		Kadın	
		Boks	Bale
Erkek	Boks	<u>2,1</u>	0,0
	Bale	0,0	<u>1,2</u>

Kaynak: Karabacak (2018: 45).

Tablo 9'da gösterilen oyunda strateji kümesi (boks, boks), (boks, bale), (bale, boks) ve (bale, bale) olarak tanımlanmıştır. İki oyuncunun ortak bir karar vermesi gereken bu oyunda baskın strateji Nash dengesi bulunmamaktadır. Bununla birlikte, oyunda iki tane Nash dengesi mevcuttur. Bu Nash dengelerinden biri (boks, boks), diğeri ise (bale, bale) stratejileridir. Eğer kadın, erkeğin boks seçtiğini düşünüyorsa, kendisi için en uygun strateji boks olacaktır. Benzer şekilde, erkek de kadının boks seçtiğini varsayarsa, boks stratejisini sürdürmesi onun için en iyi seçenek olacaktır. Diğer Nash dengesi stratejisi olan (bale, bale) için de aynı durum geçerlidir (Gintis, 2006). Cinsiyetler savaşı oyununda Pareto etkinliği söz konusudur. Yani, oyuncuların strateji profillerine bakıldığında, bir oyuncunun faydasını azaltmadan diğer oyuncunun faydasını artırmanın mümkün olmadığı bir durum söz konusudur. Bu, oyunun sonuçlarının her iki oyuncu için de optimal olduğunu göstermektedir.

Bu oyunda, oyuncuların tercihleri arasında çatışma olsa da birlikte oynamak daha faydalı olacağı görülmektedir. Bu durum, ekonominin birçok alanında karşımıza çıkar. Örneğin; iki firmanın olduğu bir endüstride, firmaların ayrı ayrı ürettiği ürünler için farklı standartlarda tercihleri olabilir. Fakat ürünlerin aynı standartlarda üretilmesinin de tüketicileri teşvik edeceğini bilmeleri ve bu yüzden birlikte hareket etmeleri, her iki firma için daha faydalı olacaktır (Shy, 1996).

2.1.4.2. Korkak Tavuk Oyunu

Korkak Tavuk oyunu oyun teorisinde, iki oyuncunun birbirine karşı stratejik kararlar aldığı ve sonuçların her iki taraf için de ciddi riskler taşıdığı bir senaryoyu modellemek için kullanılır. Oyun genellikle şu şekilde betimlenir: İki oyuncu, zıt yönlerden birbirine doğru hızla araba sürmektedir. Her iki oyuncunun da iki seçeneği vardır: direksiyonu kırmak (çekil) veya yoluna devam etmek (çekilme). Eğer ikisi de direksiyonu kırmazsa, çarpışma gerçekleşir ve bu, her iki oyuncu için de en kötü senaryodur. Bir oyuncu direksiyonu kırarsa diğeri kazanan olur ve bu, bir oyuncunun diğeri üzerinde üstünlük sağlaması anlamına gelir. Sonuç olarak direksiyonu kıran kişi korkaklık gösterecek, yani tavuk gibi kaçacaktır. Eğer oyunculardan biri direksiyonu kırmazsa kaza meydana gelecek ve ikisi de zarar görecektir (Özdamar, 2007; Cabon-Dhersin ve Etchart-Vincent,2012; Marwala, 2023) .

Korkak Tavuk oyununda, iki tane Nash dengesi bulunmaktadır. Eğer 1. oyuncu, 2. oyuncunun çekilme stratejisini seçeceğini düşünürse, 1. oyuncu için en uygun hareket çekilmek olacaktır. Benzer şekilde, 2. oyuncu da 1. oyuncunun çekilme stratejisini seçeceğini öngörürse, 2. oyuncu için en iyi strateji çekilmek olur. Bu durumda her iki oyuncunun da stratejileri karşılıklı olarak en iyi yanıtı verdikleri için (çekil, çekilme) bir Nash dengesidir. Öte yandan, eğer 1. oyuncu, 2. oyuncunun çekilme stratejisini seçeceğini düşünürse, 1. oyuncu için en uygun strateji ilerlemektir. Aynı şekilde, 2. oyuncu da 1. oyuncunun çekilme stratejisini seçeceğini öngörürse, 2. oyuncu için en uygun hareket çekilmektir. Bu strateji profili de durağan bir durum teşkil ettiğinden, 2. Nash dengesi (çekilme, çekil) olarak belirlenir (Dixit ve diğerleri, 1999; Deusch, 1988).

Tablo 10. Korkak Tavuk Oyununun Yaygın Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		Çekil	Çekilme
1. Oyuncu	Çekil	0,0	-1,1
	Çekilme	1,-1	-10,-10

Kaynak: Börü (2011:51).

Bu oyunda ortaya çıkan temel sonuç, rakip ısrarcı olduğunda, ısrarcı olmamak; ısrarcı olmadığında ise ısrarcı olmaktır. Bu bağlamda Korkak Tavuk oyunu, bir anti-koordinasyon oyunudur denilebilir (Dixit vd., 1999).

Korkak Tavuk oyunu, çeşitli alanlarda uygulanabilir ve incelenebilir. Örneğin, uluslararası ilişkilerde nükleer caydırıcılık senaryoları bu oyun üzerinden modellenmiştir. İki ülkenin de nükleer silahları kullanma tehdidinde bulunması ancak bu tehdidin uygulanması durumunda karşılıklı yıkım yaşanması, Korkak Tavuk oyununun bir türüdür. Ayrıca ekonomik modellerde ve çatışma çözümlemelerinde de bu oyun kullanılır. Örneğin, firmalar arasındaki rekabetçi stratejiler veya politik müzakerelerdeki karar alma süreçleri bu oyun teorisi çerçevesinde incelenebilir (Sun ve Sun, 2018).

2.1.4.3. Geyik Oyunu

Geyik oyunu, oyun teorisinin klasik örneklerinden biridir ve iki oyuncunun ortak bir av yakalamak için işbirliği yapıp yapmama kararını inceleyen bir koordinasyon oyunudur. Bu oyun, bireysel çıkarlar ile ortak çıkarlar arasındaki dengeyi ve güven faktörünü inceler (Skyrms, 2004). Geyik oyunu, aç olan ve geyiği avlamak isteyen avcılardan oluşan bir senaryoyu betimler. Avcıların temel amacı, geyiği avlayarak maksimum faydayı elde etmektir. Bu ancak işbirliği yapmaları durumunda mümkündür. İşbirliği yapmadıklarında geyik kaçar ve avcılar optimal fayda düzeyine ulaşamazlar. Eğer avcılar bireysel olarak hareket edip tavşana odaklanırsa, tavşanı avlamaları mümkün olabilir ancak bu durumda elde edecekleri fayda daha düşük olacaktır. Tavşanı avlamak, bireysel faydayı kısmen tatmin edebilir ancak kolektif fayda düşük kalır. İşbirliği yaptıklarında ise hem bireysel hem de kolektif fayda maksimum düzeye ulaşır. Sonuç olarak, avcılar iki seçenekle karşı karşıyadır: Ya kolektif hareket edip yüksek fayda elde edecekler ya da bireysel çıkarlarını gözetip düşük fayda ile yetineceklerdir (Deusch, 1988).

Geyik oyununda, iki tane Nash dengesi vardır. Bunlar (geyik, geyik) ve (tavşan, tavşan) stratejileridir. Eğer oyunculardan biri diğerinin geyik stratejisini seçeceğini düşünürse bu oyuncu için en iyi strateji geyik olur. Eğer oyunculardan biri diğerinin geyik stratejisini devam edeceğini düşünürse o da geyik stratejisine devam edecektir. Oyunculardan biri tavşan yakalarsa diğeri de tavşan yakalamayı isteyecektir. Çünkü bu durumda geyiği yakalamak olanaksızdır. Sonuç olarak bir tavşan seçtiğinde tavşan, geyik seçtiğinde geyik oynamak gerekir (Deusch, 1988).

Tablo 11. Geyik Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		Geyik	Tavşan
1. Oyuncu	Geyik	2,2	0,1
	Tavşan	1,0	1,1

Kaynak: Deusch, (1988).

Geyik oyunu, çeşitli alanlarda uygulanabilir ve incelenebilir. Örneğin, ekonomik modellerde firmaların işbirliği yapma veya bağımsız hareket etme kararlarını analiz etmek için kullanılabilir. Ayrıca, uluslararası ilişkilerde ülkelerin işbirliği yaparak ortak çıkarlarını maksimize etmeleri veya bireysel çıkarlarını gözeterek düşük kazanç elde etmeleri senaryolarını modellemek için de kullanılır (Cabrales, Nagel ve Armenter, 2007; Kydd, 2000).

2.1.4.4. Eşleşen Paralar Oyunu

Eşleşen Paralar oyunu, oyun teorisinin klasik örneklerinden biridir. Bu oyunda, iki oyuncu bulunmaktadır ve her iki oyuncu da aynı anda gizli olarak bir madeni parayı "yazı" veya "tura" olarak seçer. Sonuçta, oyunculardan birinin kazanıp diğerinin kaybettiği bir sıfır toplamlı oyun ortaya çıkar. Oyuncular, parayı havaya atarak sonuçların "yazı" mı yoksa "tura" mı geldiğini belirlerler. Eğer iki oyuncunun seçimi aynı ise, 2. oyuncu 1. oyuncuya 1 birim ödeme yapar; eğer seçimler farklı ise, 1. oyuncu 2. oyuncuya 1 birim ödeme yapar. Bu oyunda, oyuncuların stratejik kararları ve sonuçları belirli kurallar çerçevesinde şekillenir. Oyuncuların eşleşen veya farklı sonuçlar seçme olasılıklarına göre ödül veya ceza almaları, oyun dinamiklerini belirler. Böylece, her iki oyuncu da karşı tarafın stratejilerini tahmin ederek kendi stratejilerini optimize etmeye çalışır (Börü, 2011; Fudenberg ve Tirole, 1991).

Tablo 12. Eşleşen Paralar Oyunun Normal Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		Tura	Yazı
1. Oyuncu	Tura	$\underline{1}$,-1	-1,$\underline{1}$
	Yazı	-1,$\underline{1}$	$\underline{1}$,-1

Kaynak: Fudenberg ve Tirole (1991: 16).

Tablo 12'de belirtildiği üzere, bu oyunda bir Nash dengesi bulunmamaktadır. Bu durum, oyunda durağan bir dengenin olmaması ve bir oyuncunun kazancının diğerinin kaybına yol açmasından kaynaklanmaktadır. Bu tür oyunlar, bir oyuncunun kazancının diğer oyuncunun kaybına eşit olduğu sıfır toplamlı oyunlar olarak adlandırılır (Fudenberg ve Tirole, 1991).

Eşleşen Paralar oyununun birçok uygulama alanı bulunmaktadır. Örneğin, bu oyun, bilgi güvenliği alanında, saldırgan ve savunucunun stratejik etkileşimlerini modellemek için kullanılabilir (Eisert, Wilkens ve Lewenstein, 2000). Ayrıca, ekonomik davranışların analizinde ve karar verme süreçlerinde de önemli bir rol oynar (Chiappori, Levitt, ve Groseclose, 2002).

2.1.4.5. Koordinasyon Oyunu

Koordinasyon oyunları, oyuncuların ortak bir strateji üzerinde anlaşmaya vardıklarında ödüllendirildikleri durumu modellemek için kullanılır. Bu oyunlar, oyuncuların birbirlerinin hareketlerini tahmin ederek en iyi stratejiyi seçmeye çalıştıkları durumlardır. Koordinasyon oyunları genellikle birden fazla Nash dengesi içerir, bu da oyuncuların hangi dengeye ulaşacaklarına dair belirsizliğe sebep olur (Cai ve Daskalakis, 2011; Duguid vd., 2014).

Tablo 13'te sunulan iki kişili koordinasyon oyununda, oyuncuların hareket kümesi {A,B}'dir. Oyuncular farklı stratejileri seçerse, her iki taraf için de zararlı sonuçlar doğar. Ancak, aynı stratejiyi seçtiklerinde, her iki oyuncu için de faydalı olacaktır. Özellikle, oyuncular (A,A) stratejisini seçerse, yüksek düzeyde fayda elde ederlerken, (B,B) stratejisini seçtiklerinde daha düşük bir fayda elde ederler (Easley ve Kleinberg, 2010). Bu nedenle, her iki oyuncunun da (A,A) stratejisini seçmesi en iyi sonucu doğurur. Ekonomistler, bu tür oyunlarda sonucun tahmini için pareto etkin dengeyi kullanmaktadırlar. Oyuncular oyundan önce iletişim kurabilseler, bu dengenin ortaya çıkması oldukça olasıdır. Ancak temel soru, iletişim olmadığında sonucun ne olacağıdır ve pareto etkin dengenin geçerli olup olmadığıdır.

Benzer oyunlarda, oyuncular koordineli hareket ederek daha yüksek fayda seviyelerine ulaşabilirler. Bu nedenle, bu tür oyunlar koordinasyon oyunları olarak adlandırılmaktadır. Koordinasyon oyunlarında genellikle birden fazla Nash dengesi bulunur ve bu dengeler arasında tercih sıralaması yapılabilir. Bu tür oyunlar, sıralı pareto koordinasyon oyunları olarak bilinir (Yılmaz, 2016; Easley ve Kleinberg, 2010).

Tablo 13. Koordinasyon Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		A	B
1. Oyuncu	A	<u>2</u>, <u>2</u>	0, 0
	B	0, 0	<u>1</u>, <u>1</u>

Kaynak: Easley ve Kleinberg (2010: 170).

Koordinasyon oyunlarında, oyuncuların kararları genellikle ortak bilgi ve yüksek düzeyde güven gerektirir. Bu oyunlar, ekonomik davranışları, sosyal etkileşimleri ve hatta biyolojik süreçleri modellemek için kullanılır (Fragaszy, Visalberghi ve Fedigan, 2004).

2.1.5. En İyi Tepki Fonksiyonu

Oyun teorisinde, bazı oyunlarda sınırlı sayıda strateji (kesikli strateji) söz konusuyken bazı oyunlarda ise sınırsız (sürekli strateji) sayıda strateji söz konusu olabilir (Börü, 2011). Bu tür oyunlarda Nash dengesini bulmanın bir yöntemi de en iyi tepki fonksiyonudur. Nash dengesi, her oyuncunun diğer oyuncuların stratejilerini sabit tutarak stratejisini değiştirme gereği duymadığı bir denge durumudur. Bu bağlamda, en iyi tepki fonksiyonu, her oyuncunun stratejisini belirlemek için kullandığı bir araçtır. Oyuncular, diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepkiyi vererek kendi stratejilerini optimize ederler. Nash dengesi, bu en iyi tepki stratejilerinin kesişimidir (Osborne ve Rubinstein, 1994; Dixit vd., 1999). Başka bir ifadeyle Nash dengesi, Oyuncuların her birinin en iyi tepki stratejilerini izlediği ve bu stratejilerin birbirleriyle uyumlu olduğu bir denge durumudur. Bu dengede, hiçbir oyuncu tek başına stratejisini değiştirerek daha yüksek bir getiri elde edemez. Nash dengesinin varlığı, her oyuncunun en iyi tepki fonksiyonlarının sabit noktaları olarak tanımlanır (Osborne ve Rubinstein, 1994).

Herhangi bir i oyuncusunun olduğu bir oyunda, strateji kümesi içinde en yüksek faydayı veren stratejiyi bulmaya çalışalım. Diğer oyuncuların stratejileri s_{-i} veri iken i oyuncusunun en iyi strateji kümesi $B_i(s_{-i})$ olsun. Bu durum daha formel olarak $B_i(s_{-i})=\{s_i \in S_i : u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_i \in S_i\}$ şeklinde yazılabilir.

Yani $B_i(s_{-i})$ kümesinde i oyuncusunun s_i' gibi bir stratejisi, diğer rakiplerin s_{-i} stratejileri veri alındığında, en az diğer tüm stratejiler kadar iyidir. Kısaca bu strateji, i oyuncusunun en iyi tepki fonksiyonudur. Eğer rakipler s_{-i} stratejilerine bağlı hareket ederlerse i oyuncusunun faydasını maksimum yapacak $B_i(s_{-i})$ kümesi dışında hiçbir strateji yoktur. Şayet her oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepki olması durumunda, s^* strateji profili Nash dengesi olur ve $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*) \ \forall i \in N$ şeklinde ifade edilir (Börü, 2011).

Eğer i oyuncusu, tek tepki fonksiyonuna sahipse $s_i^*=b_i(s^*_{-i}) \ \forall i \in N$ şeklinde tanımlanır. N sayıda oyuncunun olduğu bir oyunda n tane tepki fonksiyonu olacaktır. İki oyuncu varsa $s_1^*=b_1(s_2^*)$ ve $s_2^*=b_1(s_1^*)$ şeklinde ifade edilir. Kısacası oyuncuların birbirinin hareketine verdiği (s_1^*, s_2^*) tepkisi bir Nash dengesidir. Çünkü 1. oyuncunun, 2. oyuncunun s_2^* stratejisine en iyi tepkisi s^*_1 iken 2. oyuncunun, 1. oyuncunun s_1^* stratejisine en iyi tepkisi s_2^* stratejisidir (Dixit vd., 1999).

En iyi tepki fonksiyonları, ekonomik modellerden mühendislik problemlerine kadar geniş bir uygulama yelpazesinde kullanılır. Örneğin, fiyat rekabeti modellerinde firmaların en iyi tepki stratejileri fiyat belirlemelerinde kullanılır (van Leeuwen ve Lijesen, 2016). Ayrıca yakın zamanda, en iyi tepki dinamiklerinin gelişmiş versiyonları olan "tempered best response dynamics" gibi modeller, oyuncuların karar alma süreçlerinde optimizasyon ve sürekli teşvik duyarlılığını dikkate alarak daha gerçekçi davranış modelleri sunmaktadır (Zusai, 2018).

2.1.6. En İyi Tepki Fonksiyonu Bağlamında Nash Dengesi Uygulamaları

2.1.6.1. Cournot Rekabet Modeli

John Nash'in Nash dengesi yaklaşımından yaklaşık olarak bir asır önce Cournot (1838), oligopol piyasalarını inceleyerek Nash dengesi uyarlamasına benzer Cournot rekabet modelini geliştirmiştir. Oyun teorisinin klasiklerinden biri olarak kabul edilen Cournot rekabet modeli, endüstriyel örgütlenmenin temel taşlarından birisidir. Bu model, rekabet halinde olan iki firmanın üretim dengesinin varlığı üzerinde kurulmuştur. Ancak bu dengenin bir Nash dengesi olduğu, Leonard (1944) tarafından yapılan bir çalışmayla ortaya atılmış ve daha sonra Cournot modeli, iktisadi analizlerde yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır (Yılmaz, 2016; Gibbons, 1992).

Bu rekabet modelinde, iki firma vardır. Bunlar, 1. ve 2. firma olarak tanımlanmaktadır. Rekabet halinde olan firmalar, homojen bir mal üretmektedirler. Aynı zamanda üretilen homojen mal miktarı, firmaların oyundaki stratejileridir. Modelde; malın fiyatı P(Q), her iki firmanın ürettiği toplam mal miktarı $Q(q_1+q_2)$, firma maliyetleri ise $c_i(q_i)$ ile ifade edilir. Firmanın kârı; $\pi_i(q_1,......,q_n)=q_i p(q_1+.....+q_n)-c_i(q_i)$ şeklinde gösterilir (Fudenberg ve Tirole, 1991).

Bu modelde, firmaların maliyetlerinin sabit ve ters, talep fonksiyonlarının ise lineer olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca marjinal maliyet de c'dir. Firmaların talep fonksiyonu $Q< a \; için$ P(Q)= a-Q, Q≥ a için P(Q)= 0 olur. Maliyet fonksiyonu ise $C_i(q_i)=cq_i$ olur (Gibbons, 1992).

Oyunun Nash dengesinin bulunması için firmaların en iyi talep fonksiyonlarının bulunması gerekmektedir. Bu durumda her bir firmanın kârı bulunur:

$$\pi_i(q_1,q_2)= q_1[P.(q_1+q_2)-c]$$

$$\pi_i(q_1,q_2)=\begin{cases} q_1(\alpha-(q_1+q_2)-c, & eğer\ (q_1+q_2)\le\alpha \\ -cq_1 & ,\ eğer\ (q_1+q_2)>\alpha \end{cases}$$

1. firmanın, 2. firmanın veri q_2 değeri için q_1 üretim miktarını belirleyecek en iyi tepki fonksiyonunu bulunması için q_1'in kâr fonksiyonundaki 1. türevini alınır:

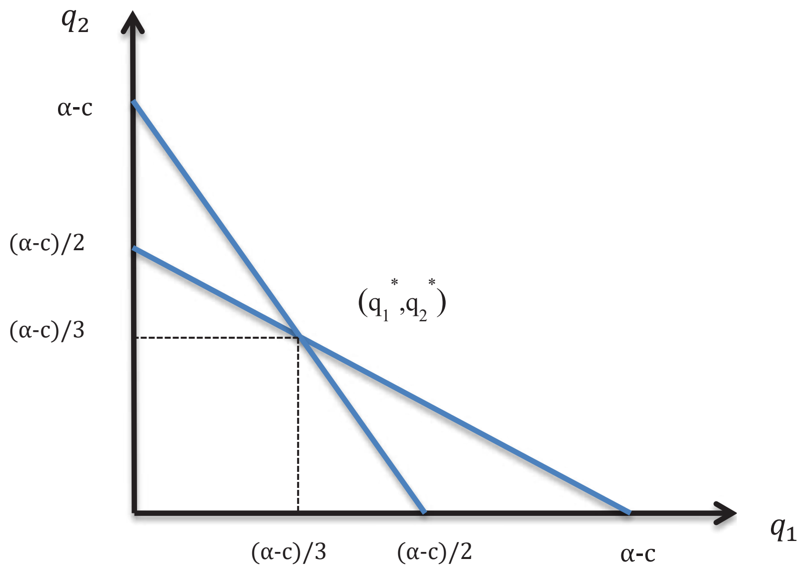
$$b_1(q_2)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha-c-q_2), & eğer\ q_2\le\alpha-c \\ 0, & ,\ eğer\ q_2>\alpha-c \end{cases}$$

Görüldüğü gibi 1. firmanın en iyi tepki fonksiyonu q_2 miktarına bağlıdır. Örneğin $q_2=0$ olursa 1. firmanın en iyi tepkisi $b_1(0)=\frac{1}{2}(\alpha-c)$ olur. Yani q_2 arttıkça 1. firmanın kârı azalmaktadır (Koçkesen, 2019b).

2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu da 1. firmanınkine benzer olacaktır (Fudenberg ve Tirole, 1991):

$$b_2(q_1)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha-c-q_1), & eğer\ q_1\le\alpha-c \\ 0, & ,\ eğer\ q_1>\alpha-c \end{cases}.$$

Görüldüğü gibi 1. firmanın en iyi tepki fonksiyonu q_2 miktarına bağlıdır. Örneğin $q_2 = 0$ olursa 1. firmanın en iyi tepkisi $b_1(0)=\frac{1}{2}(\alpha - c)$ olur. Yani q_2 arttıkça 1. firmanın kârı azalmaktadır (Koçkesen, 2019b).



Kaynak: Gibbons (1992: 18).

Şekil 3. Cournot Modelinde Oyuncuların En İyi Tepki Fonksiyonları

Şekil 3'te gösterildiği gibi Cournot-Nash dengesinde; q_1^* üretim düzeyi, q_2^* üretim düzeyine verilmiş en iyi tepkidir ve benzer şekilde q_2^* üretim düzeyi, q_1^* üretim düzeyine verilmiş en iyi tepkidir. Yani; $q_1^*=b_1(q_2^*)$, $q_2^*=b_2(q_1^*)$'dir. Bu noktalar tepki fonksiyonların birlikte çözülmesi sonucunda elde edilmiştir. Daha açık ifade edilirse $q_1 =\frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$, $q_2 =\frac{1}{2}(\alpha - c - q_1)$ bu iki denklem birlikte çözüldüğünde $q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$ sonuç olarak tek bir Cournot-Nash dengesi olduğu görülür. Firmaların toplam üretim ve fiyat düzeyi ise $Q^*=\frac{2}{3}(\alpha - c)$ ve $p^*=\frac{1}{3}(\alpha + 2c)$ olur (Yılmaz, 2016; Koçkesen, 2019b; Church ve Ware, 2000).

2.1.6.2. Bertrand Rekabet Modeli

Önceki model olan Cournot modelinde firmalar, rekabet aracı olarak üretilen malın miktarını kullanırken, Bertrand (1883) modelinde rekabetin odak noktası ürün fiyatıdır. Bu model, birbirinden farklı ürünler üreten iki duopolistin nasıl etkileşimde bulunabileceğini farklı bir yaklaşımla incelemektedir (Gibbons, 1992). Model, iki firma (1. ve 2. firma) arasındaki rekabet dinamikleri üzerine kuruludur.

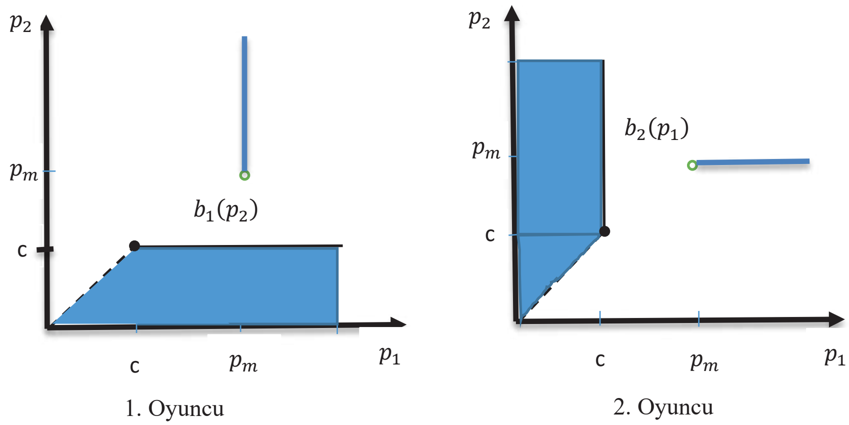
İki firmanın sabit maliyeti 'c' olduğu varsayılır ve her bir firmanın toplam maliyeti sırasıyla; p için $C_1(q_1)=cq_1$ ve $C_2(q_2)=cq_2$ olur. Talep fonksiyonu ise $p \leq \propto$ için $Q(p) = \propto - p$ ve $p > \propto$ için $Q(p) = 0$'dır. Her firmanın maliyeti sabit olduğu için her bir firma sattığı her bir birim için kârı $p_i - c$ 'dir. Bu durumda firma kârı aşağıdaki gibi olur (Gibbons, 1992):

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(\propto - p_1), & eğer\ p_1 < p_2 \\ \dfrac{1}{2}(p_1 - c)(\propto - p_1), & eğer\ p_1 = p_2 \\ 0, & eğer\ \ p_1 > p_2 \end{cases}$$

Bu oyunun Nash dengesini belirlemek için her bir firmanın en iyi tepki fonksiyonunu tespit etmek gerekmektedir. 1. oyuncu p_1 fiyatını belirlediğinde, 2. oyuncunun optimal fiyatı ne olacaktır? Benzer şekilde, 2. oyuncu p_2 fiyatını belirlediğinde, 1. oyuncunun optimal fiyatı ne olacaktır? Eğer 1. oyuncu, 2. oyuncunun fiyatından daha düşük bir fiyat olan $p_1 < p_2$ seviyesini uygularsa, piyasadaki tüm talebi karşılar; $p_1 = p_2$ olması durumunda ise her iki firma pazarı paylaşır. Dolayısıyla, 1. firmanın kârı, 2. firmanın belirlediği p_2 fiyatının bir fonksiyonudur. Bu bağlamda, 1. oyuncunun kârını $((p_1 - c)(\propto - p_1)$ ifadesiyle maksimize eden fiyat, monopol fiyatı olarak p_m şeklinde tanımlanır. 1. oyuncunun fayda fonksiyonu, 2. oyuncunun p_2 fiyatı için dört farklı durumda değerlendirilirse (Koçkesen, 2019b; Church ve Ware, 2000);

1. $p_2 <$ c olduğunda eğer $p_1 \leq p_2$ olursa 1. oyuncunu kârı negatiftir veya eğer $p_1 > p_2$ ise kârı sıfırdır. Bu durumda 1. oyuncunun p_2'den büyük her bir fiyatı en iyi tepkidir ve tepki fonksiyunu $b_1(p_2) = \{p_1 : p_1 > p_2\}$'dur.
2. $p_2 =$ c olursa 1. oyuncunun en iyi tepkisi, p_2 eşit ya da daha yüksek bir fiyattır. Tepki fonksiyonu, $b_1(p_2) = \{p_1 : p_1 \geq p_2\}$'dir.
3. c $< p_2 \leq p_m$ olursa 1. oyuncunun kârı, fiyatını $p_2'ye$ doğru çekmesiyle artar, ancak $p_1 = p_2$ olduğunda ise kârı sıfırlanır. Ancak p_2'den az ama ona daha yakın bir fiyat seçerse kârını daha yüksek düzeye çıkarmış olur. Bu durumda p_2'den küçük ve ona yakın her zaman bir fiyat vardır. Bu yüzden 1. oyuncunun en iyi tepki fonksiyonunu tanımlamak zordur. Ancak tepki Fonksiyonu $b_1(p_2) = \{\emptyset\}$ olur.
4. $p_2 > p_m$ olursa 1. oyuncu için en iyi fiyat monopol fiyattır. Çünkü p_m fiyatı 1. oyuncunun kârını maksimize eden fiyattır (Yılmaz, 2016; Koçkesen, 2019b; Church ve Ware, 2000).

Şekil 4'te, 1. ve 2. oyuncunun en iyi tepki fonksiyonları grafiksel olarak sunulmaktadır. Taralı alanda 1. oyuncunun 2. oyuncunun c'den düşük olan her bir p_2 fiyatı için en iyi tepki fiyatı, p_2'den daha yüksek olan bir fiyatı kapsadığını göstermektedir. Yukarıya doğru eğilimin düz çizgi olmamasının sebebi ise p_2'den daha yüksek ve aynı zamanda eşit olmayan fiyatların dahil edilmesidir. Üsteki siyah çizgi ise $p_2 = c$ için c'ye eşit veya daha yüksek bir fiyatın en iyi tepki olduğunu göstermektedir. Diğer yandan, dolu nokta dahil edilen fiyatı, dolu olmayan nokta ise dahil edilmeyen fiyatı göstermektedir.



Kaynak: Çevikkan (2010: 24).

Şekil 4. Bertrand Modeline Göre Oyuncuların En İyi Tepki Fonksiyonlarının Gösterimi

Nash denge fiyatlarını (p_1^*, p_2^*) değerlendirdiğimizde, 1. oyuncunun belirlediği p_1^* fiyatının, 2. oyuncunun belirlediği p_2* fiyatına karşı en iyi stratejik yanıt olduğunu, benzer şekilde 2. oyuncunun belirlediği p_2^* fiyatının da 1. oyuncunun p_1* fiyatına karşı en iyi stratejik yanıt olduğunu ifade ederiz. Bu denge durumu, her iki oyuncunun da karşı tarafın fiyatını değiştirmesi halinde kendi stratejisini değiştirmek istemeyeceği bir durumu tanımlar. Bu bağlamda, her iki oyuncunun fiyatları, birbirlerinin stratejilerine en uygun yanıt olarak belirlenmiştir. Her iki tepki fonksiyonunun kesiştiği tek nokta c'dir, yani bu oyunda yalnızca bir Bertrand-Nash dengesi vardır ve bu denge $(p_1^*, p_2^*) = (c, c)$ olarak ifade edilir. Bu durumda, herhangi bir firma c fiyatını belirlediğinde, diğer firmanın bu fiyat dışında daha avantajlı bir fiyat belirlemesi mümkün değildir. Spesifik olarak, bir firma fiyatını artırırsa satış yapamaz, düşürürse zarar eder. Bu nedenle, her iki firmanın da c fiyatını uygulaması, en iyi stratejilerinin kesişme noktasıdır ve bu da oyunun tek denge durumunu oluşturur (Yılmaz, 2016; Church ve Ware, 2000).

2.1.6.3. Mal Farklılaştırması Altında Bertrand Rekabet Modeli

Ürün farklılaştırması, fiyat rekabetini azaltarak firmaların daha yüksek fiyatlar belirlemesine olanak tanır. Farklılaştırma derecesi arttıkça, firmaların fiyat duyarlılığı azalır ve bu da her bir firmanın kendi pazar segmentinde daha yüksek fiyatlar talep etmesine olanak sağlar. Bu durum, firmaların kâr marjlarını artırır ve piyasa fiyatlarının marjinal maliyetin üzerinde seyretmesine izin verir (Häckner, 2000). Bertrand rekabetinde, firmaların fiyat stratejilerini belirlerken dikkate aldığı en önemli faktörlerden biri, ürünlerin ikame derecesidir. İkame derecesi, ürünlerin birbirlerine ne kadar benzer olduğunu ifade eder. Ürünler ne kadar farklılaştırılmışsa, ikame derecesi o kadar düşüktür ve bu, firmaların daha yüksek fiyatlar belirlemesine olanak tanır (Brander ve Spencer, 2022). Bu durum, firmaların kârlarını maksimize etmelerine ve piyasa verimliliğini artırmalarına yardımcı olur (Nagurney ve Li, 2014).

Modelde, 1. ve 2. firma diye iki firmanın olduğu farz edilir. Bu firmaların talep fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır (Schroeder ve Tremblay, 2014):

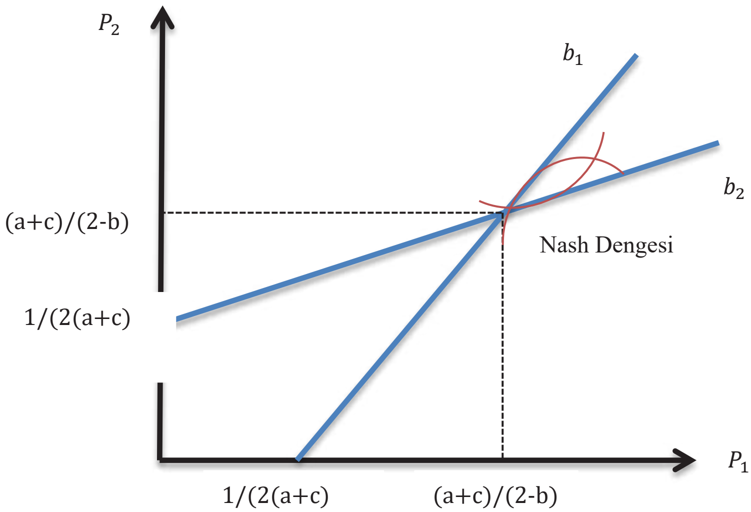
$$\begin{pmatrix} q_1 = a - p_1 + bp_2 \\ q_2 = a - p_2 + bp_1 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki b parametresi, her iki malın birbirine ikame veya tamamlayıcı olup olmadığını göstermektedir. Eğer $b > 0$ ise mallar birbirine ikame, $b < 0$ ise mallar birbirine tamamlayıcıdır.

Firmaların en iyi tepki fonksiyonlarını bulmak için ilk olarak her bir firmanın kâr fonksiyonu yazılır, daha sonra kâr fonksiyonuna ilgili firmanın üretim miktarı girilerek fiyat için türev alınır. 1. firma için kâr fonksiyonu aşağıdaki gibi olur (Schroeder ve Tremblay, 2014; Gibbons 1992):

$$\pi_1 = p_1 . q_1 - c . q_1$$

- ✓ 1. firmanın kâr fonksiyonuna q_1 yazıp p_1'e göre türevi alınırsa $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1}$= a - $2p_1$ + bp_2 + c =0, 1. firmanın en iyi tepki fonksiyonu; $p_1 = \frac{a+c+bp2}{2}$ olur.
- ✓ 2. firmanın kâr fonksiyonu ise π_2= $p_2.q_2$-c q_2 olur. 2. firmanın kâr fonksiyonuna q_2 yazıp p_2'e göre türevi alınırsa $\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2}$= a - $2p_2$ + bp_1 + c =0, 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu; $p_2 = \frac{a+c+bp1}{2}$ olur.



Kaynak: Yılmaz (2016: 51).

Şekil 5. Bertrand Rekabet Modellinin En İyi Tepki Fonksiyonları

Şekil 5'te Bertrand Rekabet Modeli'nin en iyi tepki fonksiyonları sunulmaktadır. Her iki firmanın tepki fonksiyonlarının yukarıya doğru eğimli olduğu gözlemlenmektedir, bu da iki firmanın fiyatlarının stratejik olarak tamamlayıcı olduğunu gösterir. Bir firmanın fiyatını artırması, diğer firmanın da fiyatını artırmasına yol açar, bu da her iki firma için olumlu sonuçlar doğurur. Cournot modelinde ise durum farklıdır (bkz. Şekil 3). Bir Cournot firması üretimini artırdığında, rakibi genellikle üretimini azaltır. Bunun nedeni, üretimini artıran firmanın, rakibinin stratejisini aynı yönde değiştirmesi durumunda elde edeceği marjinal kazancın azalmasıdır; dolayısıyla rakip firma, üretimini kısma eğiliminde olur. Bu durumda tepki fonksiyonları aşağıya doğru eğimli olur (Yılmaz, 2016).

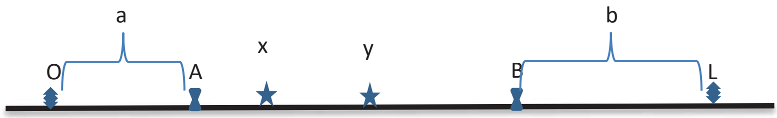
Firmaların tepki fonksiyonları birlikte çözüldüğünde ise firmaların denge fiyat düzeyi; $p_1^* = \ p_1^* = \frac{a+c}{2-b}$ olur. Bu denge, Cournot-Nash dengesidir. Fakat pareto etkin değildir. Çünkü firmalar işbirliğine yanaşırsa daha yüksek fiyat belirleyebilirler (Yılmaz, 2016; Gibbons, 1992; Church ve Ware, 2000).

2.1.6.4. Hotelling Fiyatlandırma Modeli

Hotelling fiyatlandırma modeli, Harold Hotelling (1929) tarafından geliştirilmiştir. Hotelling modeli, firmaların doğrusal bir pazarda konumlandığını ve tüketicilerin en yakın firmayı seçtiğini varsayar. Tüketiciler, firmaların konumları ve fiyatlarına göre tercihlerde bulunur.

Bu model, özellikle iki aşamalı bir oyun yapısına sahiptir: firmalar ilk aşamada konumlarını belirler, 2. aşamada ise fiyatlarını ayarlarlar (Hotelling, 1929; Church ve Ware, 2000).

Bu modelde, A ve B gibi iki firma vardır. Bu firmalar L $[0, L]$ uzunluğunda bir cadde üzerinde bulunmaktadır. A firması A noktasında, B firması ise B noktasındadır. A ile 0 arasındaki mesafe a, B ile L arasındaki mesafe ise b'dir. İki firmanın üretim maliyeti sıfırdır. Ancak mallara olan talep esnekliği oldukça elastiktir. Sırasıyla firmaların üretim miktarı (q_a,q_b) ve ürün fiyatı (p_a,p_b) şeklinde gösterilir.



Kaynak: Börü (2011: 56).

Şekil 6. Hotelling Lokasyonu

Her bir tüketici, bir birim mal satın almaktadır. Tüketicinin katlandığı maliyet; mala ödediği ücret (p_a,p_b) ve ulaşım maliyeti (τ)'dir. Bu modelde her tüketicinin amacı ulaşım maliyeti ve ürün için ödedikleri maliyeti minimize etmektir (Fleckinger ve Lafay, 2010).

Tüketicilerden birinin x gibi bir yerde olduğu farz edilir. Bu durumda tüketicinin A firmasından alışveriş yaparsa katlanması gereken maliyet τ $[x - a]'dır$. Diğer taraftan B firmasından alışveriş yapmanın maliyeti ise τ $[x - (L - b)]'$dir. X noktasında bulunan tüketicinin fayda fonksiyonu aşağıdaki gibi olur (Yılmaz, 2016; Hoteling, 1929; Lu, 2006):

- ✓ Eğer tüketici A firmasından malı alırsa fayda fonksiyonu:

$$U_x = -p_a - \tau\, [x - a]$$

- ✓ Eğer tüketici B firmasından malı alırsa fayda fonksiyonu:

$$U_x = -p_b - \tau\, [x - (L - b)]$$

Diğer yandan "y" gibi bir noktada başka bir tüketici olduğu, A ve B firmalarından herhangi birinden mal almasında bir fark olamadığı varsayılırsa bulunduğu nokta; $a < y < L - b$ olur. Fayda fonksiyonu ise $U_y = = -p_a - \tau\, [y - a] = -p_b - \tau\, [y - (L - b)]$ olur. Kayıtsız kalan tüketicinin iki fayda fonksiyonu birlikte çözülürse;

$$y = \left[\left(\frac{p_b - p_a}{2\tau}\right) + \left(\frac{L - b + a}{2}\right)\right] \; olur.$$

A firması, 0 ile y arasındaki bütün noktalarda tüketicilere daha düşük maliyette hizmet vermektedir. Bu denklem aynı zamanda A firmasının talep fonksiyonudur. Aynı durum B firması için de geçerlidir. Bu bağlamda

B firmasının da talep fonksiyonu aşağıdaki olur (Yılmaz, 2016; Börü, 2011)):

$$L - y = \left[\left(\frac{p_a - p_b}{2\tau}\right) + \left(\frac{L + b - a}{2}\right)\right].$$

İki firmanın kâr fonksiyonu da aşağıdaki gibi olur:

$$\pi_a = \left[\left(\frac{p_b . p_a - {p_a}^2}{2\tau}\right) + \left(\frac{(L - b + a)p_a}{2}\right)\right]$$

$$\pi_b = \left[\left(\frac{p_a . p_b - {p_b}^2}{2\tau}\right) + \left(\frac{(L + b - a)p_b}{2}\right)\right].$$

Her iki firmanın kâr fonksiyonların türevi alınıp sıfıra eşitlenirse iki firmanın en iyi talep fonksiyonu bulunur. Bu şekilde optimizasyonunu 1. koşulu sağlanacaktır:

$$\frac{\delta \pi_a}{\delta p_a} = \left[\left(\frac{p_b\_2p_a}{2\tau}\right) + \left(\frac{(L - b + a)}{2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\delta \pi_b}{\delta p_b} = \left[\left(\frac{p_a\_2p_b}{2\tau}\right) + \left(\frac{(L + b - a)}{2}\right)\right] = 0.$$

Yukarıdaki eşitlik aynı anda çözüldüğünde, firmaların Nash dengesinde oluşan fiyat değerleri bulunur:

$$p_a = \frac{\tau(3L - b + a)}{3} \qquad p_b = \frac{\tau(3L + b - a)}{3}.$$

Bu fiyatlar, firmaların denge durumlarını gösterir. Yani bu durum, iki firmanın fiyatını değiştirmek istemediği bir durumdur (Hoteling, 1929; Lu, 2006; Shy, 1996). Sonuç olarak firmalar, birbirlerinin fiyatlarına en iyi tepkiyi vererek Nash dengesine ulaşırlar. Firmaların fiyat stratejileri, rakip firmanın fiyat stratejisine bağlıdır. Hotelling modelinde, denge durumunda firmaların fiyatları genellikle marjinal maliyetlerin üzerinde belirlenir ve firmalar arasında bir pazar bölüşümü gerçekleşir (Patrí ve Sacco, 2017).

2.1.7. Karma Stratejiler

Bu aşamaya kadar, gerçek dünyada karşılaşılan ve anlaşılması kolay olan saf stratejiler üzerinde analizler yapılmıştır. Bu bölümde ise, oyuncuların belirli olasılıklarla saf stratejilerini belirledikleri karma stratejilere odaklanılacaktır. Saf strateji, oyuncunun hangi stratejiyi seçeceğini belirli kurallarla belirlerken, karma strateji bu seçimi olasılıklara dayalı olarak yapar (Yılmaz, 2016). Diğer bir ifadeyle karma stratejiler, bir oyuncunun belirli saf stratejileri belli olasılıklarla seçtiği stratejilerdir. Bu yöntem, oyuncuların davranışlarını daha öngörülemez kılmak ve rakip stratejilerine karşı daha esnek ve etkili tepkiler geliştirmek için kullanılır. Karma strateji dengesi, oyuncuların karma strateji kullanarak en iyi tepkiyi verdiği ve bu stratejilerin uyum içinde olduğu bir dengedir. John Nash tarafından ortaya konulan bu denge kavramı, her oyuncunun diğer oyuncuların stratejilerini sabit tutarak kendi stratejisini değiştirmeme eğiliminde olduğu bir denge durumunu ifade eder (Nash, 1950).

Tahmine dayalı oyunlarda tek bir Nash dengesi tespit etmek mümkün değildir. Çünkü oyuncuların hangi adımı atacağı konusunda belirsizlik bulunmaktadır. Bu belirsizliği yorumlayabilmek için karma stratejiler geliştirilmiştir (Giz, 2003). Karma stratejiler, birden fazla stratejinin mevcut olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bazı oyunlarda, birden çok denge noktası olabilir. Bu gibi durumlarda, karma stratejiler oyunculara en iyi karar strateji demetini sağlar. Böylece oyuncular, rakiplerine karşı hamlelerinin bir kısmında bir strateji, diğer kısmında ise farklı stratejiler uygulama şansı elde ederler (Ramusen, 1989).

Karma stratejiler, oyuncuların belirsizlik altında daha esnek hareket etmelerini sağlar. Bu stratejiler, özellikle iki kişili sıfır toplamlı oyunlarda sıkça tercih edilir. Oyun teorisinin temel varsayımlarından biri, oyuncuların rasyonel davranarak faydalarını maksimize etmeye çalışmalarıdır. Bu bağlamda karma stratejiler, oyuncuların beklenen faydalarını artırmalarına yardımcı olur (Selten, 1975). Karma stratejiler, spor müsabakaları ve rekabetçi oyunlarda da önemli bir işlev görür. Örneğin, futbol maçlarında kaleciler ve penaltı atan oyuncular, rakiplerinin hamlelerini tahmin edememeleri için karma stratejiler uygularlar. Kaleci, topun hangi köşeye gideceğini tahmin etmeye çalışırken, penaltıcı da topu hangi köşeye atacağını rastgele seçer (Walker ve Wooders, 2001). Ayrıca, karma stratejiler, deneysel ekonomi araştırmalarında da önemli bir araçtır. Deneysel çalışmalar, oyuncuların karma stratejiler kullanarak nasıl davrandıklarını ve bu stratejilerin oyun sonuçlarını nasıl etkilediğini inceler. Bu tür çalışmalar, karma strateji dengesinin geçerliliğini ve uygulamada nasıl işlediğini test etmek için kullanılır (Erev ve Roth, 1998).

Tanım; i oyuncusunun karma stratejisi, S_i strateji kümesinde yer alan saf stratejilere ilişkin bir olasılık dağılımı şeklindedir. Karma strateji, σ_i sembolü ile gösterilir ve i oyuncusunun S_i strateji kümesinde [0,1] aralığında tanımlanmış bir fonksiyondur. Yani i oyuncusunun her s_i stratejisi için [0,1] aralığında değerler alır. i oyuncusunun oynadığı karma strateji, saf stratejilerden biri ($s_i \in S_i$) ise bu durumda i oyuncusunun s_i stratejisini seçme olasılığı $\sigma_i(s_i)$ şeklinde gösterilir. Bir karma stratejinin saf stratejilerle olasılık değerlerinin toplamı 1'e eşittir;

$$\sum_{si \in Si} \sigma_i(\mathrm{si}) = 1.$$

i oyuncusunun karma stratejisi, saf stratejilerine karşılık gelen olasılıkların listesini ifade eder. Herhangi bir oyunda n sayıdaki oyuncuların karma stratejilerin birleşimine karma strateji profili ($\sigma = \sigma_{1,} \dots \sigma_n$) denir (Karabacak, 2018).

2.1.7. 1. Karma Stratejilerde Beklenen Fayda

Deterministik (olasılık içermeyen) fayda fonksiyonu, oyuncuların tercihlerini sıralamak için kullanılır. Örneğin, bir oyuncunun hareket kümesinde a ve b gibi hareketler olsun. Eğer u(a)>u(b) ise, oyuncu a hareketini b hareketine tercih ediyor demektir (a≥b). Gördüğümüz gibi, oyuncular deterministik oyunlarda strateji profillerini tam olarak bilirler ancak bazı durumlarda oyunun sonucunda elde edilecek fayda durumu belirsiz olabilir. Günlük hayatta da hareketlerimizin sonucunu tam olarak öngöremediğimiz durumlar mevcuttur. Belirsizlik içeren durumlarda dengeyi bulmak gerektiğinde beklenen fayda hipotezi karşımıza çıkar (Yılmaz, 2016). Bir örnek yardımıyla tanımlayalım:

Örneğin; iki oyunculu bir oyunda, oyuncuların strateji profilinde (10, 20) gibi kazanç çiftinin alınması için 1. oyuncunun X, 2. oyuncunu Y stratejisini seçmesi gerekir. 1. oyuncunun X seçme ihtimali 0.4, 2. oyuncunun Y seçme ihtimalinin 0.6 olduğu bir durumda beklenen faydalar ne olur?

Tanım; i oyuncusunun karma stratejisinden beklenen faydası; Eu_i (σ) şeklinde gösterilir. Bazı durumlara Eu_i (σ) yerine u_i gösterimi tercih edilebilir. Strateji profillerinin $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ gerçekleşme olasılığı, her i oyuncusunun s_i stratejisini oynama olasılığına çarpımına eşittir ve $\sigma_i(s_i)$ şeklinde gösterilir. Bu bağlamda n oyunculu bir oyunda bir stratejinin oynama olasılığı (Yılmaz, 2016; Karabacak, 2018);

$\mathrm{Pr}(s) = \mathrm{Pr}\,(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sigma_1(s_1)\,\sigma_2(s_2), \dots\dots, \sigma_n(s_n) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\mathrm{si})$ olur.

Örnekte değindiğimiz gibi 1. oyuncunun X stratejisini 0.4, 2. oyuncunun Y stratejisini 0.6 ihtimalle seçme olasılığı durumunda, (X, Y) stratejinin çıkma ihtimali; $0.4\, x\ 0.6 = 0.24$ olur ve bu oran da strateji profilinin olasılık kat sayısıdır.

$\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots\dots, \sigma_n$ karma stratejili bir oyunda, i oyuncusunun beklenen faydasını bulmak için öncelikle her saf stratejisinin beklenen faydası bulunur. i oyuncusunun n oyunculu bir oyunda beklenen faydası;

$\mathrm{u}(\sigma) = \mathrm{E}u_i\,(\sigma) = \sum \mathrm{Pr}(s) \,.\, u_i\,(s) = \sum[\prod \sigma_i(s_i)]\, u_i\,(s)$ şeklinde olur.

Yukarıda oyuncuların (X, Y) stratejisini oynama ihtimallerini 0.24 bulunmuştu ve 1. oyuncunun bu profilden kazancı 10 birimdi. Bu durumda 1. oyuncusunun X strateji oynamasından beklenen fayda $10 x$ 0.24=2.4 olur. Eğer bu oyunun dört stratejili bir oyun olduğu farz edilirse 1. oyuncunun diğer üç strateji profilinden beklenen faydası sırasıyla; 1.6, 2.4, 3.6 olursa 1. oyuncunun bu oyunda beklenen faydası 2.4 + 1.6 + 2.4 + 3.6=10 olur (Karabacak, 2018).[1]

2.1.7. 2. Refah oyunu

Refah oyunları, toplumsal refahın maksimize edilmesini hedefler. Refah oyunlarında karma stratejiler, oyuncuların belirli stratejileri belirli olasılıklarla seçmelerini gerektirir. Bu durum, özellikle denge analizlerinde önemli hale gelir. Çünkü oyuncuların belirsizlik altındaki davranışları, karma stratejilerle daha gerçekçi bir şekilde modelleme imkânı sunar (Gabszewicz ve Mertens, 1971). Bu bağlamda, karma strateji dengesi, her oyuncunun karma strateji kullanarak en iyi tepkiyi verdiği ve bu stratejilerin birbirleriyle uyumlu olduğu bir denge durumunu ifade eder. Örneğin, ürün farklılaştırması ve özelleştirme taahhüdü bağlamında yapılan analizlerde, karma stratejilerin kullanımı, hükümetin toplumsal refahı maksimize etmek için en uygun özelleştirme düzeyini belirlemesine yardımcı olabilir (Fujiwara, 2007; Chen, 2017).

Bu oyunda, iki oyuncu vardır. Oyunculardan biri hükümet, diğeri ise yoksul olan bir işsizdir. Hükümetin, eğer yoksul vatandaş iş ararsa yardım edeceği, iş aramazsa yardım etmeyeceği bir durum söz konusudur.

Tablo 14. Refah Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		Yoksul	
		İş ara (q)	*İş arama (1-q)*
Hükümet	*Yardım et (p)*	3, 2	-1, 3
	Yardım etme (1-p)	-1, 1	0, 0

Kaynak: Ramusen (1989: 67).

Nash dengesinin bulunması için muhtemel bütün stratejilerin tek tek incelenmesi gerekmektedir (Ramusen, 1989). Muhtemel stratejiler:

[1] 1. oyuncunun X oynaması p, Y oynaması 1-p; 2. oyuncunun X oynaması q, Y oynaması 1-q olasılıkla oynadıkları farz edilirse p=0,4, q=0,4 olur. Bu durumda oyuncuların (X, X) oynaması 0,16, (Y, X) oyması 0,24, (Y, Y) oynaması 0,36 olur.

- ✓ Strateji profili (yardım et, iş ara), Nash dengesi değildir. Çünkü devlet yardım etmeyi tercih ettiğinde, yoksul vatandaş için "iş arama" daha avantajlı olduğu için onu tercih edecektir.
- ✓ Strateji profili (yardım et, iş arama), Nash dengesi değildir. Çünkü bu durum, yoksul vatandaş için kârlı olsa da hükmet için zararlı olacaktır.
- ✓ Strateji profili (yardım etme, iş ara), Nash dengesi değildir. Çünkü bu durum hükümet için zararlı olacaktır.
- ✓ Strateji (yardım etme, iş arama), Nash dengesi değildir. Bu stratejide her iki oyuncu için ne kâr ne zarar söz konusudur. Ancak hükümet yardım etmemeyi seçtiğinde yoksul vatandaş için iş aramak daha kârlı olacağı için Nash dengesi yine olmaz (Ramusen, 1989).

Bu refah oyununda, hiçbir oyuncunun dominant stratejisi olmadığı gibi oyunda Nash dengesi de yoktur. Bu durumda, karma strateji Nash dengesi olup olmadığına bakılır:

Eğer hükümet p olasılıkla yardım etse ve yoksul vatandaş da q olasılıkla iş ararsa hükümetin beklenen getirisi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}u_{hükümet} &= p.[3.q + (-1)(1-q)] + (1-p)[-1q + 0(1-q)] \\ &= p[3q - 1 + q] - q + p.q \\ &= p[5q-1] - p\end{aligned}$$

Maksimizasyon yaklaşımını kullanarak 1. derece koşul için türev alınırsa;

$$\frac{\partial \mathrm{E}u_{hükümet}}{dp} = 5q - 1 \quad \rightarrow q = 0.2\ olur$$

Karma strateji dengesinde, yoksul vatandaşın iş araması % 20 ihtimal dâhilindedir. Bu durumun bir köşe çözümü vardır. Yoksul vatandaşın stratejisine bağlı olarak üç stratejiden biri hükümetin beklenen getirisini en yüksek seviyeye çıkarır. Bu stratejileri, tek tek sıralayalım:

- ✓ 1.'si, yoksul vatandaşın çalışma ihtimalinin olmaması durumunda, hükümet yardım etmez (p=0).
- ✓ 2.'si, yoksul vatandaşın çalışmasının muhtemel olması durumunda, hükümet yardım eder (p=1).
- ✓ 3.'sü, yoksul vatandaşın çalışma olasılığının %20 (q=0.20) olması durumunda hükümet kayıtsız kalır (Yılmaz, 2016).

Karma stratejinin olması için üç ihtimal vardır:

- ✓ Hükümet için bir optimal karma strateji vardır.

- ✓ Eğer yoksul vatandaş iş aramayı en az %20 olasılıkla seçerse hükümet her zaman yardım etmeyi seçecektir. Eğer yoksul vatandaş %20 olasılığın altında seçerse hükümet hiçbir zaman yardım etmeyecektir.
- ✓ Hükümet için karma strateji optimal ise yoksul vatandaşın %20 olasılıkla iş aramayı seçmesi gerekir. Hükümetin yardım etmeyi seçmesi için yoksul vatandaşın en yüksek getiri fonksiyonuna bakmalıyız:

$$\mathrm{E}u_{yoksul} = p.[2.q + 3(1-q)] + (1-p)[1.q + 0(1-q)]$$

$$= 2pq + 3p - 3pq + q - pq$$

$$= -q(2p-1) + 3p$$

1. sıra koşulu; $\frac{\partial \mathrm{E}u_{yoksul}}{dq} = -(2p-1) = 0 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow p = 0.5 \ olur$

Eğer yoksul vatandaş %20 olasılıkla iş aramayı tercih ederse hükümet %100 ya da %0 olasılıkla yardım etme noktasında kararsızdır. Eğer stratejiler bir Nash dengesi oluşturuyorsa hükümet (p= 0.5) olasılıkla seçer. Bu bağlamda hükümet 0.5 olasılıkla yardım etmeyi, yoksul vatandaş da 0.2 olasılıkla iş aramayı tercih eder. Denge sonucu dört strateji profilinden biri olabilir. En yüksek olasılığa (0.4=0.5(1-0.2) sahip olan strateji profilleri, (yardım yapma, iş arama) ve (yardım yap, iş arama)'dır (Ramusen, 1989).

2.1.7. 3. Eşleşen Paralar Oyunu

Eşleşen Paralar oyununda, saf strateji bağlamında bir Nash dengesi yoktur. Çünkü her iki oyuncu da rakibinin hamlesini tahmin ederek stratejisini sürekli değiştirebilir. Bu nedenle, oyuncular karma stratejiler kullanarak karışık Nash dengesine ulaşırlar. Her iki oyuncu da yazı veya tura seçme olasılıklarını eşit (yani %50) belirleyerek, rakibinin hamlesini tahmin etmeyi imkânsız hale getirir. Bu strateji, her iki oyuncunun da uzun vadede beklenen kazancını sıfıra getirir (Goeree, Holt, ve Palfrey, 2003).

Bu oyunda, her bir oyuncu için iki tür strateji vardır. Bunlar yazı (Y) ve tura (T)'dir. 1. oyuncunun turayı p, 2. oyuncunun ise q olasılıkla seçtiği varsayılır. Olasılıkların toplamı 1 olduğundan sırasıyla oyuncuların yazı seçme olasılıkları 1-p ve 1-q olacaktır (Yılmaz, 2016).

Tablo 15. Karma Stratejilerde Eşleşen Paralar Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		2. Oyuncu	
		Tura (q)	Yazı (1-q)
1. Oyuncu	Tura (p)	3, 2	-1, 3
	Yazı (1-p)	-1, 1	0, 0

Kaynak: Koçkesen ve Ok (2007: 71).

- ✓ 1. oyuncunun beklenen faydası (Yılmaz, 2016);

$$E(u_1) = p.[q.(1) + (1-q).(-1)] + (1-p).[q.(-1) + (1-q).(1)]$$
$$= p.(2q-1) + (1-p).(1-2q) \text{ olur.}$$

- ✓ 2. oyuncunun beklenen faydası;

$$E(u_2) = q.[p.(-1) + (1-p).(1)] + (1-q).[p.(1) + (1-p).(-1)]$$
$$= q.(1-2p) + (1-q).(2p-1) \text{ olur.}$$

- ✓ Şimdi p ve q değerlerini bulmak için türev alalım:

$$\frac{\delta E(u_1)}{\delta p} = 2q - 1 - (1-2q) = 0 \rightarrow q = 1/2$$

$$\frac{\delta E(u_2)}{\delta q} = (1-2p) - (2p-1) = 0 \rightarrow p = 1/2$$

Türev sonucunda, q=1/2 olduğunda 1. oyuncunun beklenen faydası sıfır olacaktır:

$$E(u_1) = p.\left(2.\frac{1}{2} - 1\right) + (1-p).\left(1 - 2.\frac{1}{2}\right) = 0$$

✓ 1. oyuncu için en iyi tepki fonksiyonunu bu şekilde yorumlanabilir (Gibbons, 1992):

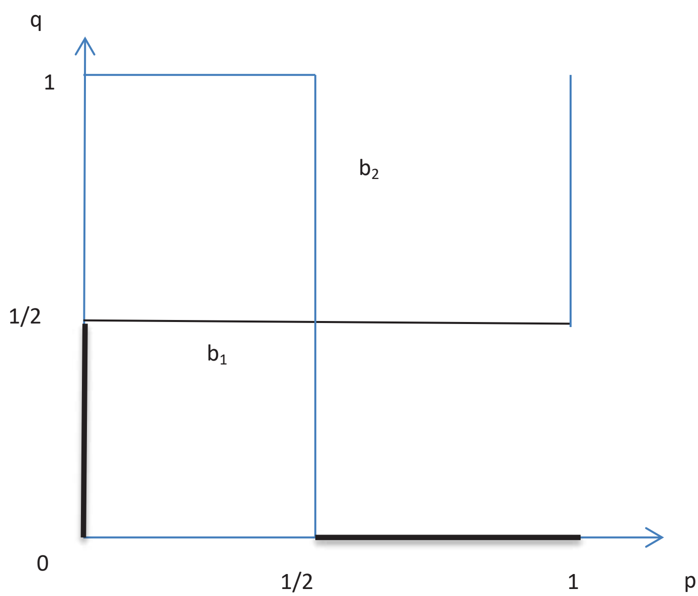
$$B_1(q) = \begin{cases} (0) & eğer\ q < \frac{1}{2} \\ (p: 0 \le p \le 1) & eğer\ q = \frac{1}{2} \\ (1), & eğer\ q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eğer 2. oyuncu $q = \frac{1}{2}$ olasılığını seçerse 1. oyuncu için herhangi bir p değeri en iyi tepkidir. Eğer 2. oyuncunun stratejisi $q \neq \frac{1}{2}$ olursa 1. oyuncu için en iyi tepki pür strateji olur. Yani $q > \frac{1}{2}$ olursa her zaman 1. oyuncu tura oynar, $q < \frac{1}{2}$ olursa 1. oyuncu her zaman yazı oynar.

✓ 2. oyuncu için en iyi tepki fonksiyonunun yorumu, aşağıdaki gibi olur:

$$B_2\,(p) = \begin{cases} (0) & eğer\ \ p < \dfrac{1}{2} \\ (q\colon 0 \le q\ \ \le 1\,) & eğer\ \ p\ = \dfrac{1}{2}\,. \\ (1), & eğer\ p > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Eğer 1. oyuncu $p = \frac{1}{2}$ olasılıkla stratejilerini rastlaştırırsa herhangi bir q değeri, 2. oyuncu için en iyi tepkidir. Eğer 1. oyuncunun stratejisi $p \neq \frac{1}{2}$ olursa 2. oyuncu için en iyi tepki pür strateji olur. Yani $p > \frac{1}{2}$ olursa her zaman 2. oyuncu tura oynar, $p < \frac{1}{2}$ olursa 2. oyuncu her zaman yazı oynar (Karabacak, 2018; Koçkesen ve Ok, 2007).



Kaynak: Gibbons (1992: 39).

Şekil 7. Eşleşen Paralar Oyununda En İyi Tepki Fonksiyonları

Bu aşamaya kadar elde edilen bütün sonuçlar göz önüne alarak karma strateji Nash dengesi bulunabilir. Eğer 1. oyuncu için p seçimi, 2.

oyuncunun q seçimine en iyi tepki olursa 1. oyuncunun stratejisi p=0, p=1 ve 0< $p < 1$ olabilir. Eğer 2. oyuncu için q seçimi, 2. oyuncunun p seçimine en iyi tepki olursa 1. oyuncunun stratejisi q=0, q=1 ve 0< $q < 1$ olabilir (Gibbons, 1992).

Sonuç olarak her bir oyuncunun üçer tane seçimi vardır. Bu da dokuz tane Nash dengesi seçeneğini verir ve bunlar aşağıdaki gibi olur:

✓ 1.'si (p=1, q=1), (p=1,q=0), (p=0,q=1), (p=0,q=0),
✓ 2.'si bir karma strateji adayı (0< $p < 1$, 0< $q < 1$),
✓ 3.'sü (p=1, 0< $q < 1$), (p=0, 0< $q < 1$), (0< $p < 1$, q=0), (0< $p < 1$, q=1), dört pür strateji adayı birleşirse oyuncuların birbirlerine karşı en iyi tepkileri değildir, yani pür Nash dengesi yoktur.

Fakat karma strateji Nash dengesi; $q = \frac{1}{2}$ iken 1. oyuncunun 0< $p < 1$ arasındaki seçimi en iyi seçimi ve $p = \frac{1}{2}$ iken 2. oyuncunun 0< $q < 1$ arasındaki seçimi en iyi seçimdir. Yani oyuncuların birbirine karşı en iyi tepkileri $p = q = \frac{1}{2}$ olacaktır. Sonuç olarak bu karma strateji Nash dengesidir. Bu da Şekil 7'de oyuncuların en iyi tepki fonksiyonlarının kesiştiği noktadır (Gibbons, 1992).

2.2. Tam Bilgili Dinamik Oyunlar

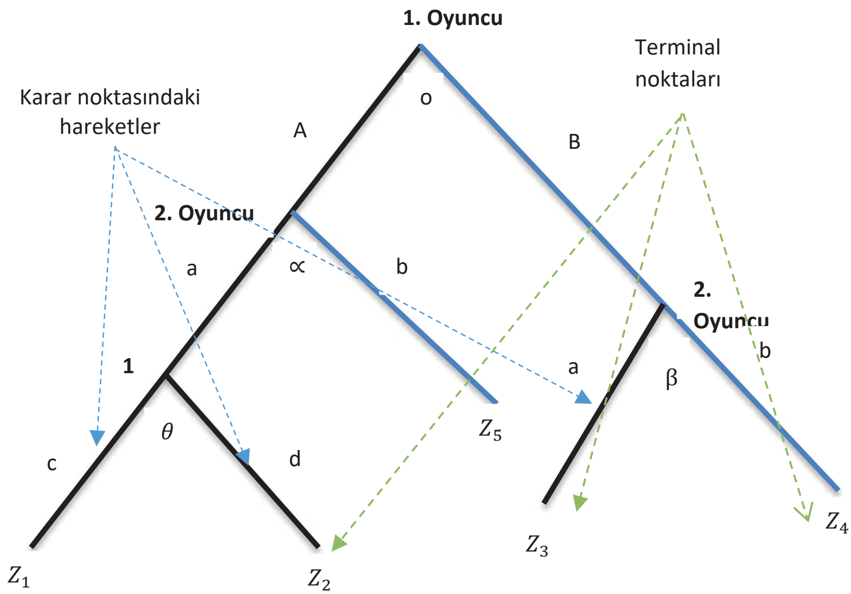
Dinamik oyunlarda zaman kavramı kritik bir öneme sahiptir. Statik oyunlarda, oyuncular eş zamanlı olarak hareket eder ve birbirlerinin hamlelerini gözlemleme fırsatına sahip olmazlar. Buna karşın, dinamik oyunlarda oyuncular ardışık hareket eder ve birbirlerinin hamlelerini gözlemlerler. Bu gözlem süreci, oyuncuların stratejik kararlarını ve oyun dinamiklerini etkileyen önemli bir faktördür (Romp, 1997). Bu oyunlar, genellikle ardışık karar süreçlerini ve zamanın oyun üzerinde belirleyici bir rol oynadığı senaryoları içerir (Basar ve Olsder, 1999). Bu oyunlarda, oyuncular tüm ödül fonksiyonları, strateji setleri ve oyunun geçmişi hakkında tam bilgiye sahiptir. Bu tür oyunlarda, her oyuncu diğer oyuncuların ne bildiğini ve nasıl hareket edeceğini bilir (Aumann ve Hart, 1992). Her oyuncunun kendi stratejisini, rakiplerinin stratejilerini göz önünde bulundurarak optimize ettiği bir denge durumudur. Dinamik oyunlarda, bu denge genellikle ardışık karar alma süreçleriyle analiz edilir (Kreps ve Wilson, 1982).

Dinamik oyunların üç temel aşaması vardır (Giz, 2003);

✓ Tüm oyuncular ardısal olarak karar alırlar.
✓ Oyuncular, oyunun her bir aşamasında kararları göz önüne alır.

- ✓ Tüm oyuncular birbirinin kazançlarını ya da fayda düzeylerini bilmektedir.

Dinamik oyunlar, ağaç formu yöntemi kullanılarak ifade edilir. Bu form, oyuncuların birbirlerinin hareketlerini gözlemlemesini ve buna göre hareket etmesini sağlar. Ağaç formunda kök, dallar ve düğümler yer almaktadır. Kök, oyunun ilk başlama düğümüdür. Her bir dal, bir düğüme ve karara sahiptir. Bundan dolayı her bir düğümde birden fazla strateji bulunur. Aynı zamanda ağaç formunda dallar genişleyerek ilerlediği için bu tür oyunlara genişleyen biçimli oyunlar da denir (Uçan ve Aytekin, 2013).



Kaynak: Çevikkan (2010: 28).

Şekil 8. Genişleyen Biçimli Oyunun Unsurları

Şekil 8'de o noktası ilk karar noktası iken $\propto, \beta\ ve\ \theta$ noktaları ise diğer alt karar noktalarıdır. o noktasındaki 1. oyuncunun A ve B hareketi vardır. Yani 1. oyuncunun ilk hareket kümesi A(o)= $\{A,\ B\}$'dir. 1. oyuncu o noktasında bir karar seçtikten sonra oyun sırası 2. oyuncuya geçer. Eğer 1. oyuncu A hareketini seçerse 2. oyuncu $\propto$ karar noktasında olacak, B hareketini seçerse 2. oyuncu β karar noktasında olacaktır. 2. oyuncu $\propto ve\ \beta$ karar noktasında a ve b hareketleri vardır. Yani 2. oyuncunun hareket kümeleri A($\propto$)= $\{a, b\}$ ve A(β)= $\{a, b\}$'dir. Aynı zamanda 2. oyuncunun $\propto ve\ \beta$ gibi iki tane bilgi kümesi vardır. $\propto$ bilgi kümesinde 2. oyuncu, 1. oyuncunun A hareketini oynadığını, β bilgi kümesinde ise 1. oyuncunun B hareketini oynadığını bilir (Karabacak, 2018).

Her oyuncu, kendi bilgi kümesinde ne yapacağını seçer. i oyuncusu, hareketini bilgi kümesinden seçer ve a_i ile gösterilir. Bilgi kümesinin seçim alternatifleri ise A_i gösterilir. Sonuç olarak hareket kümesi, bilgi kümesine göre değişir. Oyuncunun karar noktası $x_i \in X_i$ şeklinde ifade edilir. $A_i(x_i)$ de, i oyuncusunun x karar noktasındaki hareket kümesidir. Her bir karar noktası sadece bir oyuncuya aittir. Tüm oyuncuların karar noktası kümesi $X= \{X_0, X_1, \ldots X_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu bağlamda yukarıda örnekteki oyuncuların karar noktaları sırasıyla; $X_1 = \{o, \theta\}$ ve $X_2 = \{\alpha, \beta\}$ olur.

Oyun ağacının son noktasında, yani bittiği noktada terminal noktaları vardır. Terminal noktaları oyuncuların, oyun sonundaki kazanımlarını gösterir. Terminal noktalar $Z=\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ şeklinde gösterilir. Oyundaki her $z \in Z$ terminal noktası oyundaki bir sonuca karşılık gelir (Yılmaz, 2016; Çevikkan, 2010).

Tam bilgili dinamik oyunların iki tane önemli çözüm yöntemi vardır. Bunlar sırasıyla geri çıkarım ve alt oyun mükemmel Nash dengesi yöntemidir. İlk olarak geri çıkarım yöntemine değinilecektir.

2.2.2. Geri Çıkarım Yöntemi

Geri çıkarım yöntemi, oyun teorisinin birçok alt dalında geniş bir şekilde incelenmiştir. Aumann (1987), "oyuncuların rasyonelliği" ve "ortak bilgi" kavramlarını kullanarak geri çıkarım yönteminin temellerini açıklamıştır. Diğer yandan Selten (1975), geri çıkarımın ardışık oyunlarda mükemmel Nash dengesini bulmak için kullanılabileceğini göstermiştir. Bu yöntem, oyuncuların gelecekteki tüm aşamalarda rasyonel kararlar alacağını varsayar ve bu nedenle oyun sonunda en iyi stratejiye ulaşmak için ardışık olarak en iyi hamleleri yapmalarını sağlar. Ayrıca Fudenberg ve Tirole (1991) de geri çıkarım yönteminin oyun teorisindeki uygulamalarını detaylandırmışlardır.

Geri çıkarım yöntemi, yaygın formda ya da ağaç diyagramında gösterilen tam ve mükemmel bilgili dinamik oyunlara baskınlık kavramının uyarlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu yöntem, oyuncular için düşük kazanç getiren hareketlerin elenerek, yüksek kazanç getiren stratejilerin birleştirilmesine dayanan bir çözüm noktasını öngörür. Aynı zamanda geri çıkarım yöntemine, Nash geri çıkarım da denilir (Bekar, 2008; Çevikkan, 2010).

Geri çıkarım yönteminde analiz, bir oyun ağacının bütün bitiş kavşaklarında ne olacağını düşünmekle başlar, ilk başlangıç karar kavşağına kadar devam eder. Yani analiz, son aşamadan ilk aşamaya kadar sürer (Karabacak, 2018).

Geri çıkarım yöntemi ilkesi aşağıdaki gibi ilerler;

- ✓ Oyunun son karar noktasının incelenmesi,
- ✓ Oynanmayacak düşük kazanç getiren hareketlerin elenmesi,
- ✓ Elenen bu hareketlerin oyun ağacından silinmesi,
- ✓ Oyun ağacının yeniden revize edilerek çizilmesi,
- ✓ Yukarıdaki sürecin sonuç bulunana kadar devam etmesidir (Ateş, 2018).

Örnek: Bu oyunda, oyuncu olarak iki firma vardır. Bunlardan B firması piyasaya hâkim, A firması ise piyasa dışındaki bir firmadır. B firmasının kabul ve savaş şeklinde iki stratejisi vardır. A firmasının ise "gir" ve "dışarıda kal" şeklinde iki tane stratejisi bulunmaktadır.

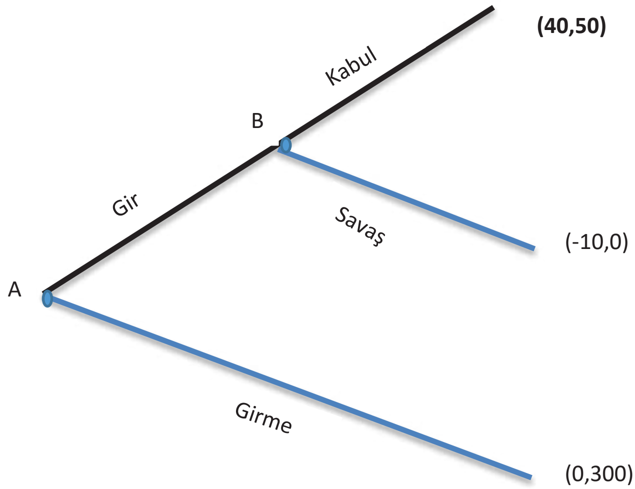
Tablo 16. İki Oyunculu Dinamik Oyununun Normal Form ile Gösterimi

		B Firması	
		Kabul	Savaş
A Firması	Gir	*40,50*	-10, 0
	Girme	0, 300	*0, 300*

Kaynak: Ramusen (1989: 134).

Tablo 16'ya bakıldığında iki tane Nash dengesi olduğunu görüyoruz. Bunlar sırasıyla; (gir, kabul) ve (dışarıda kal, savaş)'dır. Ancak (dışarıda kal, savaş) dengesi zayıftır. Çünkü hâkim firma, piyasaya girmek isteyen firmanın dışarıda kaldığını gördüğünde "kabul"ü seçecektir. Bu durum, oyun ağacıyla yardımıyla Şekil 9'da verilmektedir.

Şekil 9 incelendiğinde, piyasaya girmeye çalışan A firması, piyasaya girme kararı aldığında B firması ya savaş ya da kabul stratejisini seçecektir. B firması savaşmayı tercih ettiğinde, hiçbir kârı olmazken A firmasını kabul ederse 50 birim fayda elde edecektir. A firmasının savaşmayı göze alması inanılır değildir. Yani hâkim firmanın, savaşma gibi bir niyeti olursa piyasaya girmeye çalışan firma asla savaşmaz ve dışarıda kalmayı hep tercih eder. (Dışarıda kal, savaş) dengesi, Nash dengesidir; ancak alt oyun mükemmel Nash dengesi değildir. Eğer A firması piyasaya girerse B firmasının en iyi yanıtı kabul olacaktır. Bu durum duopol anlaşmasının kaçınılmaz olduğunu ispatlamaz, ancak girişteki caydırıcılığın sonucudur. B firmasının piyasaya girmeyeceği kesin olduğu sürece A firması kabul ve savaş stratejisi arasında kayıtsızdır. Ancak B firmasının piyasaya girmesi zayıf bir ihtimal olsa da A firması kabul stratejisini seçer ve Nash dengesi bozulur. Mükemmel olmayan kurallar, güvenilir olmayan tehditlerdir (Koçkesen ve Ok, 2007; Ramusen, 1989).

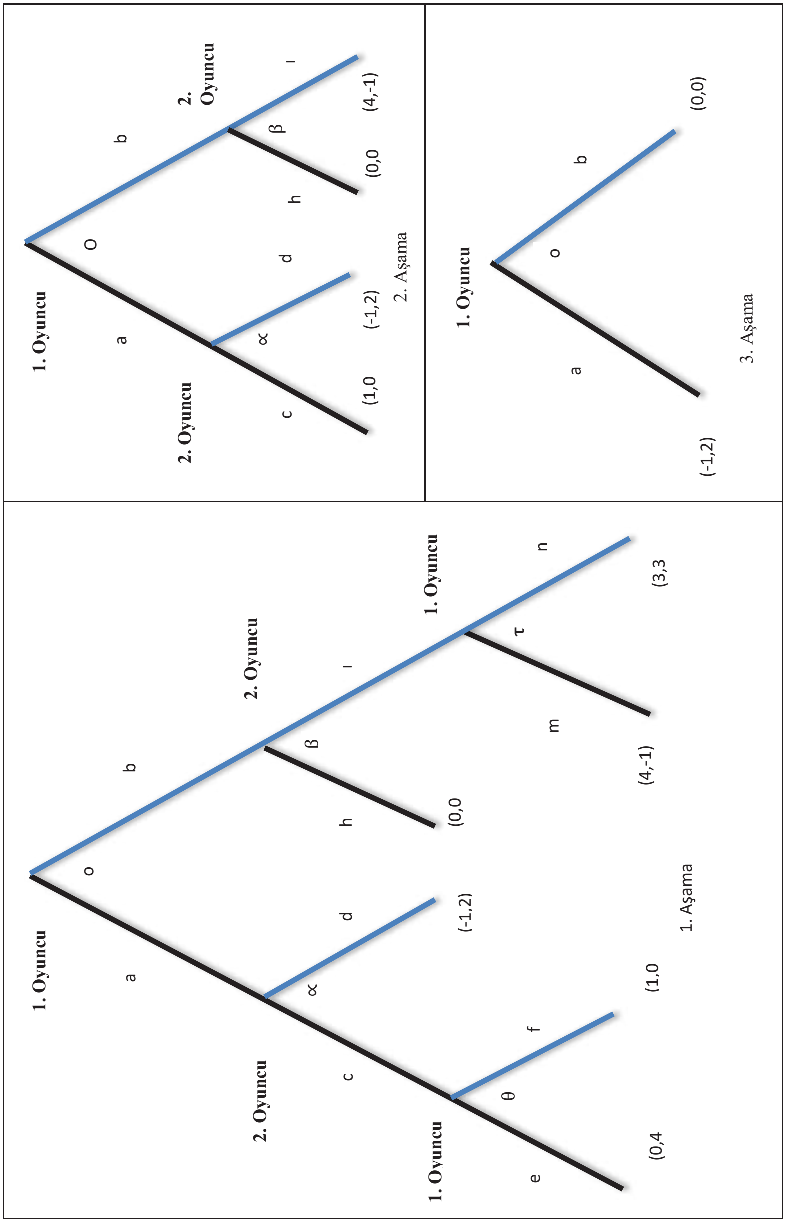


Kaynak: Ramusen (1989: 134).

Şekil 9. İki Oyunculu Dinamik Oyununun Yaygın Form Gösterimi

Şekil 10'daki oyununun dengesini bulmak için oyun ağacının terminal noktalarından yukarıya doğru yola çıkarak karşımıza çıkan ilk karar noktalarından başlanır. Bu karar noktaları, 1. oyuncuya ait θ ve τ karar noktalarıdır. Bu karar noktalarında hareket sırası 1. oyuncuya aittir. 1. oyuncu faydasını maksimize eden hareketleri seçer ve bu durumda θ karar noktasında e, τ karar noktasında ise n hareketi elenerek yeni oyun ağacı çizilir. Yeni oyun ağacında 2. oyuncuya ait ∝ ve β karar noktaları vardır. 2. oyuncu, bu karar noktalarında kendisi için en iyi seçim olan d ve h hareketlerini seçer. Son aşamada ise elenen hareketler silinerek son oyun ağacı çizilir ve 1. oyuncu b hareketini seçerek oyunu bitirir (Fudenberg ve Tirole, 1991).

Sonuç olarak bu oyunda, her bir oyuncu optimal stratejilerini takip ettiklerinde ortaya çıkan sonuç, her bir oyuncunun sıfır (0, 0) fayda almasıdır. Ancak bu oyunda her bir oyuncunun en yüksek fayda düzeyi olan (3,3) alması mümkünken (0,0) fayda düzeyini seçmeleri ilginç görünebilir. Bu durumun sebebi her bir oyuncunun, her aşamada rasyonel davranmasıdır. Örneğin, 2. oyuncunun β karar noktasında ı hareketini seçmesi hata olurdu. Çünkü 1. oyuncu τ karar noktasında kendisi için en yüksek faydayı sağlayan m hareketini seçer ve bu strateji 2. oyuncunun zararınadır. 2. oyuncu bu durumu bildiği için β karar noktasında h hareketini seçmiştir (Yılmaz, 2016).



Kaynak: Yılmaz, (2016: 156)

Şekil 10. İki Oyunculu Dinamik Oyununun Geri Çıkarım Metoduyla Çözümü

2.2.3. Alt Oyun Mükemmel Nash Dengesi

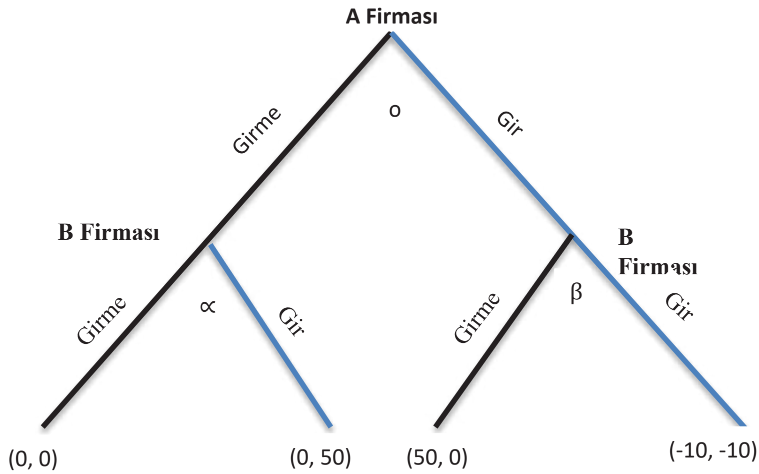
Alt oyun mükemmel Nash dengesi, oyun teorisinde önemli bir kavramdır ve Reinhard Selten tarafından 1965 yılında geliştirilmiştir. Bu kavram, dinamik oyunlarda oyuncuların her alt oyunda rasyonel davranmalarını ve Nash dengesine uygun stratejiler seçmelerini gerektirir. Alt oyun mükemmel Nash dengesi, bir oyunun her alt oyununda Nash dengesi oluşturan stratejiler bütünüdür. Bu, oyunun her noktasında oyuncuların en iyi stratejiyi seçmelerini sağlar. Bu dengeyi belirlemek için sıklıkla geriye çıkarım yöntemi kullanılır. Bu yöntemde, oyun ağacının sonundan başlanarak geriye doğru adım adım hareket edilir ve her aşamada oyuncuların en rasyonel hamleleri belirlenir. (Holler ve Klose-Ullmann, 2020; Selten, 1975).

Alt oyun mükemmel Nash dengesi, bir oyun ağacında öngörülen çözümün bütün alt oyunlarda bir Nash dengesinin olması durumudur. Alt oyun, oyun ağacının herhangi bir düğümünden başlayıp, oyun ağacının sonuna kadar devam eden ve hiçbir bilgi kümesini bölmeyen oyunun küçük bir bölümüdür. Dinamik oyunların çözümünde, oyun ağacının tüm alt oyunlarında Nash dengesi olması gerekir. Bu bağlamda her oyuncunun, oyunun her bölümünde faydasını artıracak şekilde hareket etmesi beklenir (Bekar, 2008; Çevikkan, 2010). Bu yöntemin örnek yardımıyla anlatılması daha da açıklayıcı olacaktır.

Örnek; A ve B adında iki firma, yeni bir pazara girme niyetindedirler. Ancak piyasa iki firmadan ancak birini kaldırabilmektedir. Eğer her iki firma birlikte piyasaya girerse her firma 10 milyon $ zarar edecektir. Eğer firmalardan biri piyasaya girerse giren firma 50 milyon $ kazanacak, diğer firma ise ne kâr ne de zarar edecektir.

Eğer bu oyunda oyuncular birlikte hareket (eş anlı) etseydi, B firmasının sadece girip girmeme gibi iki hareketi olurdu. Ancak oyuncular ardısal hareket ettiğinden B firması, A firmasının hareketini gözlemleyip hareket edeceği için dört harekete sahiptir (Romp, 1997). Bu durumda, B firmasının muhtemel dört stratejisi vardır (bkz. Şekil 11) (Karabacak, 2008):

- ✓ A firması hangi hareketi yaparsa yapsın, her zaman piyasaya gir; (gir, gir) veya (girme, gir).
- ✓ A firması hangi hareketi yaparsa yapsın, piyasaya girme; (gir, girme), (girme, girme).
- ✓ Her zaman A firması ile aynı hareketi yap; (girme, girme), (gir, gir).
- ✓ Her zaman A firmasının yaptığı hareketin tersini yap; (gir, girme), (girme, gir).



Kaynak: Karabacak (2018: 79).

Şekil 11. İki Firmalı Piyasa Savaşı Oyunun Yaygın Form Gösterimi

Tablo 17'deki oyunun saf strateji Nash dengelerinin bulunması için iki yöntem kullanılmıştır. İlk olarak her bir firmanın rakibine karşı en iyi cevabı (yani optimal stratejileri) aranmıştır. Oyuncuların birbirine karşı en iyi cevaplarının altı çizilerek belirtilmiştir. 2.'si firmaların rakiplerine karşı en iyi strateji seçimleri göz önüne alınarak üç tane Nash dengesi bulunmuştur. Yani rasyonel olan her bir oyuncu, karşı oyuncunun ne yapabileceği inancına göre davranıp faydasını maksimize edeceği Nash dengeleri bulunmuştur.

Tablo 17. İki Firmalı Piyasa Savaşı Oyunun Normal Form Gösterimi

		B Firması			
		(Gir, Gir)	(Girme, Girme)	(Gir, Girme)	(Girme, Gir)
A Firması	Gir	-10, -10	*50, 0*	-10, -10	*50, 0*
	Girme	*0, 50*	0, 0	0, 0	0, 50

Kaynak: Karabacak (2018: 86).

Bulunan üç Nash dengesini, tek tek yorumlayalım:

1. B firması, A firmasının stratejilerinden bağımsız olarak A firmasını piyasaya girmekle sürekli tehdit etmektedir. Eğer A firması bu duruma kanarsa piyasaya girmeyecektir.

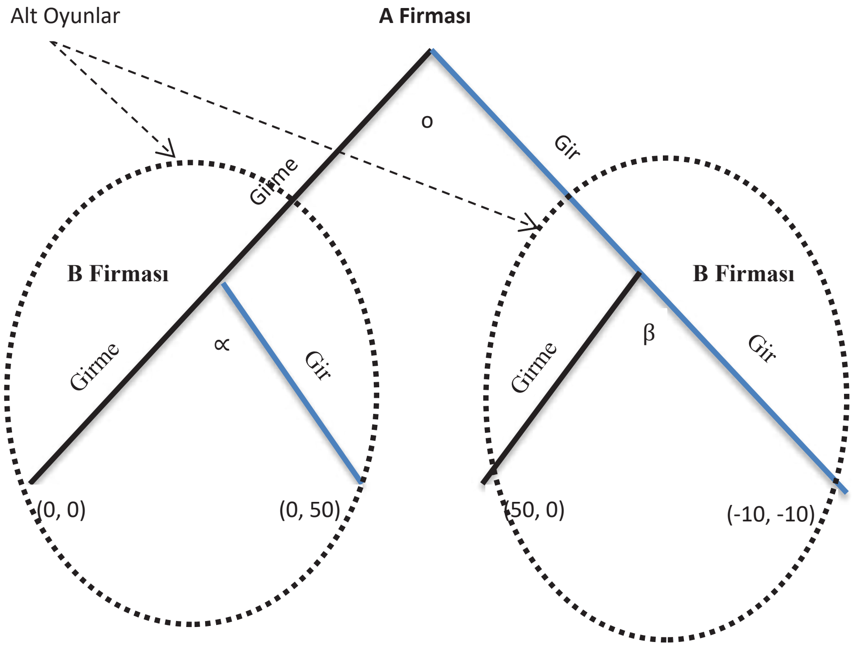
2. B firması, A firmasının stratejilerinden bağımsız olarak her zaman piyasa dışında kalacağı sözünü vermektedir. A firması bu söze kanarsa piyasaya girecektir.
3. B firması, A firmasının her zaman tersi bir strateji izleyeceği sözünü vermektedir. A firması bu söze kanarsa piyasaya girecektir (Romp, 1997).

B firması, ilk iki Nash dengesinde A firmasından bağımsız hareket ederken, 3. Nash dengesinde belirli bir koşula bağlı olarak bağımlı davranmaktadır. Koşullu strateji, bir oyuncunun kendi eylemlerini en az bir rakibin eylemlerine göre belirlemesi durumunu ifade eder ve tekrarlı oyunlarda önemli bir kavramdır. A firması, B firmasının tehdit ve taahhütlerini sadece blöf olarak değerlendirebilir. Bu durum güven ve inanç kavramlarını gündeme getirir. Oyun teorisinde, bir tehdit veya taahhüt, yalnızca oyuncunun belirli bir zamanda yerine getirme olasılığı yüksekse güvenilirdir. Bu bağlamda, B firmasının bazı taahhütleri güvenilir değildir. Örneğin, B firması, A firmasının eylemlerinden bağımsız olarak pazara girme veya girmeme tehdidinde bulunabilir. Ancak, bu güvenilir değildir çünkü A firması piyasaya girerse, B firmasının piyasada kalma ilgisi yoktur. Aynı şekilde, B firmasının her zaman piyasada kalma taahhüdü de güvenilir değildir; çünkü A firmasının piyasaya girmemesi B firmasının yararınadır. Oyuncuların rasyonel olduğu varsayımı altında, bu durum ortak bir bilgidir. Bununla birlikte, oyuncular mantıklı oldukları için güvenilir ifadelere inanırlar. Bu tür stratejik düşünceler, Nash dengesine alternatif olarak alt oyun mükemmel Nash dengesi ile daha iyi açıklanabilir (Bekar, 2008).

Dinamik oyunlarda birden fazla Nash dengesi olabilir. Çoğu zaman bu dengeler, oyuncuların çıkarlarına uygun olmayan tehditler ve sözler içerebilir. Alt oyun mükemmel Nash dengesi, bu tür oyunlara mantıklı bir çözüm sunar. Alt oyun mükemmel Nash dengesi, herhangi bir oyunda bulunan tüm alt oyunlar için bir Nash dengesi olmasını gerektirir. Alt oyunda olması gereken nitelikler, aşağıda sıralanmıştır:

- ✓ Alt oyun, tek bir karar kavşağı ve bir bilgi kümesinden başlayıp, kendinden sonra gelen bütün karar ve bitiş kavşaklarını içine alır.
- ✓ Alt oyun, bağlı bulunduğu orijinal oyunun hiçbir bilgi kümesini kesmez.
- ✓ Alt oyun, aynı zamanda bağlı bulunduğu oyunun oyuncularını içerir. Yani n oyunculu bir oyun ağacının alt oyunu da n oyunculu bir oyundur. Fakat bütün oyuncuların alt oyunda bir hareket üstlenmesi söz konusu olmayabilir (Karabacak, 2018).

Şekil 12'de gösterildiği gibi, oyunda iki tane alt oyun vardır ve bunlar daire içerisinde gösterilmiştir. Bu alt oyunlar, B firmasının karar düğümlerinden başlamıştır.



Kaynak: Karabacak (2018: 85).

Şekil 12. İki Firmalı Piyasa Savaşı Oyunun Alt Oyunları

Alt oyun mükemmel Nash dengesi, herhangi bir oyununda bulunan tüm alt oyunlar için bir Nash dengesi olmasını gerektirir. Bu bağlamda ilk olarak alt oyun mükemmel Nash dengisinin olup olmadığına bakalım:

- ✓ İlk Nash dengesinde, A firmasının kararı ne olursa olsun B firması, piyasaya girmekte kararlıdır. Bu strateji, bir alt oyun Nash dengesidir. Ancak A firması bu tehditlerden çekinip piyasaya girmezse bu strateji optimal olur. Diğer yandan A firması piyasaya girdiği durumda, B firmasının piyasaya girmekle tehit etmesi ve piyasaya girmesi menfaatine değildir. Sonuç olarak bu iddia güvenilir değildir ve A firması buna kulak asmamalıdır. Bu bağlamda bu Nash dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesi değildir.
- ✓ 2. Nash dengesi ise A firmasının kararı ne olursa olsun B firmasının piyasaya girmeyeceği sözünü verdiği durumdur. Ancak bu durum, A firmasının piyasaya girmesiyle optimal olur, aksi durumda piyasa girmemesi optimal değildir. Eğer A firması piyasaya girmezse B firması kendi çıkarını düşünerek sözünde durmayıp piyasaya girecektir. Aynı

zamanda bu söz de güvenilir değildir. Bu durumda A firmasının bu söze inanması beklenemez. Sonuç olarak bu Nash dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesi değildir.

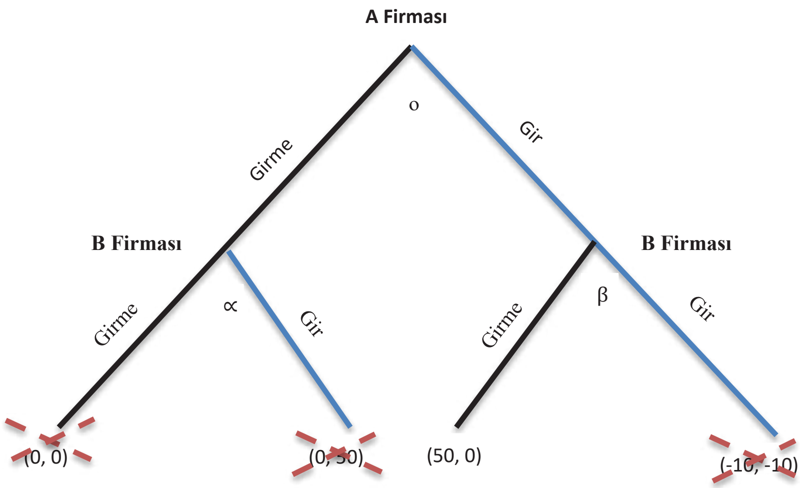
- ✓ 3. Nash dengesi de B firmasının sürekli olarak A firmasının yapacağı hamlenin tersini yapacağı durumdur. A firmasının piyasaya girmesi durumunda B firmasının piyasaya girmemesi, A firmasının piyasaya girmemesi durumunda ise B firmasının piyasaya girmesi optimal bir stratejidir. Bu söz güvenilirdir. B firması bunu yerine getirebilir. Bu bağlamda bu söz A firması için hem güvenilir hem de mantıklı olacaktır.

Sonuç olarak bu dinamik oyunun tek mükemmel Nash dengesi, A firmasının piyasaya girip B firmasının ise piyasaya girmediği durumda oluşur. Çünkü A firması ilk olarak piyasaya girer ve bu durumu gözlemleyen B firması piyasaya girmeme kararı alır (Romp, 1997).

Açık form dinamik oyunlarda geriye çıkarım metodu, oyuna uygulanan tam baskınlık ilkesidir. Ancak bu ilke, stratejiden ziyade hareketlerin kazançlarını göz önüne alarak eleme yapma yöntemidir. Dinamik oyunlarda bu ilkenin temel yol haritası, oyunun son bölümlerinden başlayarak geriye doğru başarılı düğümler boyunca hareket edip oyunun başlangıç noktasına ulaşmaya çalışmaktır. Bu bağlamda oyunda düşük kazanç getiren hareketler elenerek optimal sonuç elde edilir (Bekar, 2008). Başka bir ifadeyle geri çıkarım metodunun temel prensibi, oyunun son aşamasından başlayarak geriye doğru analiz yapmaktır. Bu süreçte, her bir oyuncu son hamlede en iyi stratejiyi seçer ve bu stratejiyi daha önceki hamlelere kadar geriye doğru taşır. Bu yaklaşım, her bir oyuncunun gelecekteki hamlelerini ve diğer oyuncuların tepkilerini dikkate alarak, mevcut durumda en iyi stratejiyi seçmeyi sağlar. Sonuç olarak, geri çıkarım yöntemi, oyun sonundaki olası sonuçları dikkate alarak mevcut durumdaki optimal stratejiyi belirlemeye yardımcı olur (Perea, 2001). Şimdi geriye çıkarım yöntemini, aynı örnek üzerinde uygulayalım (Bekar, 2008):

Şekil 13'de görüldüğü gibi, oyunun son bölümünden başlandığında karşımıza iki düğüm çıkmaktadır. İlk düğümde görüldüğü gibi A firması piyasaya girmiştir, B firmasının ise önünde iki strateji mevcuttur. Bu durumda B firması düşük kazanç getiren stratejisini elemek zorundadır. Bu bağlamda bakıldığında; eğer B firması piyasaya girerse 10 milyon $ zarar eder, girmezse ne kâr ne de zarar eder. Bu durumda B firmasının piyasaya girmemesi daha faydalı olacağından "piyasaya gir" stratejisi elenir.

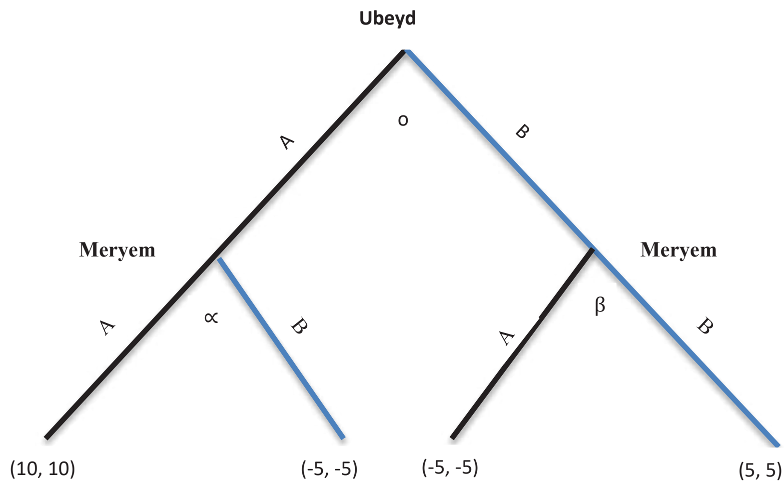
Diğer yandan 2. düğümde A firmasının piyasaya girmediği bir durum söz konusudur. Bu durumda B firması piyasaya girdiğinde 50 milyon $ kazanırken girmediğinde ne kâr ne de zarar eder. Dolayısıyla B firması için düşük kazanç getiren hareket (0, 0) elenir. Artık ilk karar noktasına geçilir. Burada A firması elenen stratejileri göz önüne alarak girip girmeme kararını verir. Kalan stratejilere bakıldığında; piyasaya girdiğinde 50 milyon $ kazanırken girmediğinde ne kâr ne zarar edecek. Bu durumda mantıklı davranacak olan A firması piyasaya girmeyi tercih edeceğinden (0, 50) stratejisi de elenir. Sonuç olarak bu oyunda optimal strateji A firmasının piyasaya girdiği ve B firmasının girmediği durumdur ve kazanç vektörü de (50, 0) olur (Romp, 1997).



Kaynak: Bekâr (2008: 31)

Şekil 13. İki Firmalı Piyasa Savaşı Oyunun Geri Çıkarım Metodu ile Çözümü

Örnek; Bu oyun, iki oyuncunun olduğu dinamik bir oyundur. Ubeyd ve Meryem'in oynadığı oyunda, A ve B gibi iki hareket bulunmaktadır. Ubeyd, 1. oyuncu iken Meryem 2. oyuncudur. Tam bilgili bir dinamik oyun olan bu oyunda, oyuncular hem tam bilgiye sahiptir hem de birbirinin hareketini gözlemleme fırsatı bulmaktadırlar. Bu oyunda ilk olarak Ubeyd hareket eder ve strateji kümesi $\{A, B\}$'dir. Meryem'in strateji kümesi farklıdır. Çünkü Meryem, Ubeyd'in hareketlerini gözlemler ve burdan bir bilgi kümesi oluşur (bkz. Şekil 14). Bu durumda Meryem, Ubeyd'e bağlıdır ve strateji kümesi Ubeyd'in stratejilerine tepkisini yansıtır. Sonuç olarak Meryem, dört farklı tepki verir (bkz. Tablo 18).



Şekil 14. İki Oyunculu Dinamik Oyunun Yaygın Form Gösterimi

Tablo 18'de verilen Meryem'in strateji kümesinde bulunan herhangi bir strateji profilinin ilk hareketi Ubeyd A hareketi seçtiğinde verdiği tepkiyi, 2. hareketi ise Ubeyd'in B hareketi seçtiğinde verdiği tepkiyi gösterir. Örneğin (A, A) strateji profili; Ubeyd A hareketini seçtiğinde, Meryem'in A hareketini seçtiği ve Ubeyd B hareketini seçtiğinde, Meryem'in A hareketini seçtiği anlamına gelir.

Tablo 18. İki Oyunculu Dinamik Oyunun Normal Form Gösterimi

		Meryem			
		(A, A)	(A, B)	(B, A)	(B, B)
Ubeyd	A	***10, 10***	***10, 10***	-5, -5	-5, -5
	B	-5, -5	5, 5	-5, -5	***5, 5***

Tablo 18'e bakıldığında, üç tane Nash dengesi olduğu görülür. Bunlar sırasıyla; E_1= {A, (A, A)}, E_2={A, (A, B)} ve E_3= {B, (B, B)}'dir. E_1 ve E_2 Nash dengelerinde her iki oyuncu A hareketini seçmiştir, E_3 Nash dengesinde ise oyuncular B hareketini seçmiştir. İlk Nash dengesi olan E_1'de Meryem, Ubeyd'in hareketlerinden bağımsız A hareketini seçeceğinden, Ubeyd A hareketini seçer. E_2 Nash dengesinde Meryem, Ubeyd ne seçerse onu seçer. E_3 Nash dengesinde ise Meryem, Ubeyd'in ne seçtiğini umursamadan B hareketini seçtiğinden, Ubeyd de B hareketini seçer (Yılmaz, 2016; Osborne ve Rubinstein, 1994).

Nash dengeleri tek tek değerlendirilecek olursa E_3 Nash dengesinde eğer Ubeyd A hareketini seçseydi, Meryem'in B hareketi seçmesi makul bir durum olmayacaktı. Ancak bu durumda A hareketini seçmesi daha makul olacaktı. Eğer Meryem, rakibinden A hareketini bekleseydi, ilk aşamada kendisi için faydalı olan A hareketini seçerdi. Bu durumda E_3 dengesi makul bir denge olmayacaktı. Aynı şekilde E_1 dengesine bakıldığında bu dengenin de makul olmadığı görülür. Çünkü Meryem, Ubeyd'in hareketlerinden bağımsız A hareketini seçeceği bir durumda, Ubeyd'in A hareketi yerine B hareketini seçmesi Meryem'in zararına olacaktır. Bu durumda Meryem'in B hareketini seçmesi daha faydalı olacağından, E_1 dengesi de makul bir denge değildir. Sonuç olarak tek makul denge, E_2 dengesidir. Çünkü oyundaki hareket sırası oyuncuların kararları için büyük önem arz eder. Hem Nash dengesinde hem de stratejik biçimli gösterimde ortaya çıkan temel problem, kimin önce hareket ettiğinin ihmal edilmesidir. Bu oyunda, Ubeyd ilk önce hareket eder, Meryem ise düşünme fırsatı bularak hareket eder.

Oyunda üç alt oyun bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla; 1) "o" ana karar noktasından başlayan ana oyun, 2) "∝" karar noktasından başlayan alt oyun ve 3) "β" karar noktasından başlayan diğer alt oyundur. E_1 dengesi, 1. ve 3. alt oyunlarda Nash dengesi iken, 2. alt oyunda Nash dengesi değildir. E_3 dengesi ise 1. ve 2. alt oyunlarda Nash dengesi iken, 3. alt oyunda Nash dengesi değildir. E_2 dengesi, tüm alt oyunlarda Nash dengesi özelliğini taşımaktadır. Sonuç olarak, E_1 ve E_3 denge noktaları Nash dengesi olarak kabul edilse de, mükemmel Nash dengesi değillerdir. Mükemmel Nash dengesi olabilmesi için tüm alt oyunlarda Nash dengesi olması gerekmektedir. Bu bağlamda E_2 dengesi, tüm alt oyunlarda Nash dengesi olduğu için oyunun tek mükemmel Nash dengesi olarak belirlenmiştir (Yılmaz, 2016; Osborne ve Rubinstein, 1994).

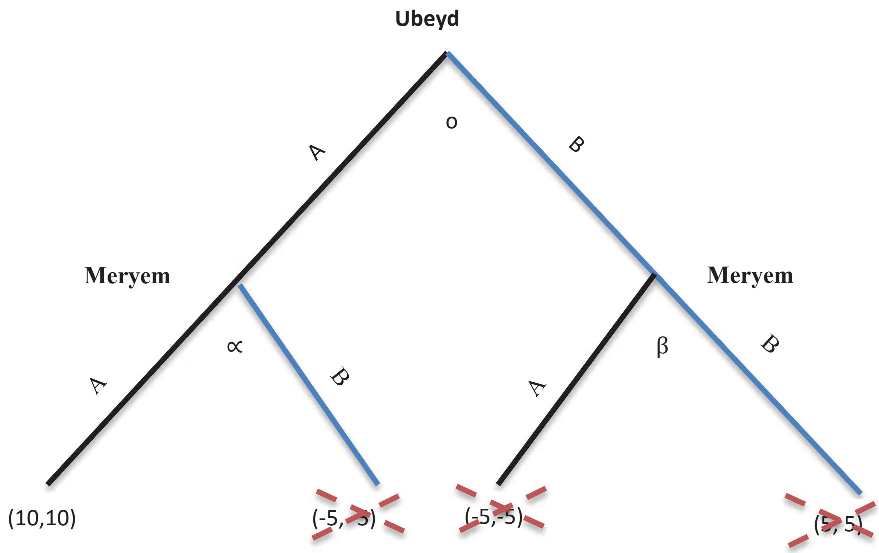
Aynı oyunu, geri çıkarım metoduyla çözelim:

Şekil 15'te gösterildiği üzere, oyunun son bölümünden başlandığında iki karar düğümü karşımıza çıkmaktadır. İlk düğüm olan "∝" karar noktasında, Meryem'in A ve B olmak üzere iki farklı hareketi bulunmaktadır. Meryem, A hareketini tercih ettiğinde 10 birim, B hareketini tercih ettiğinde ise -5 birimlik bir fayda elde edecektir. Rasyonel bir oyuncu olarak Meryem, maksimum faydayı sağlayan A hareketini tercih edecektir, bu nedenle B hareketi elenecektir.

2. düğüm olan "β" karar noktasında ise Meryem, hareketini tercih ettiğinde -5 birim, B hareketini tercih ettiğinde ise 10 birimlik bir fayda ile

karşı karşıya kalacaktır. Bu bağlamda rasyonel davranan Meryem, daha yüksek fayda sağlayan B hareketini tercih edecek ve A hareketi elenecektir.

Sonuç olarak, Ubeyd'in karşısına iki tercih çıkmaktadır: A hareketi ile 10 birim ve B hareketi ile 5 birimlik fayda düzeyleri... Ubeyd, rasyonel bir karar verici olarak, en yüksek faydayı sağlayan A seçeneğini tercih edecektir. Böylece, geri çıkarım yöntemi kullanılarak, oyunun sonucu (10, 10) olarak belirlenir.



Şekil 15. İki Oyunculu Dinamik Oyunun Geri Çıkarım Metoduyla Çözümlenmesi

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

EKSİK BİLGİLİ OYUNLAR

Oyuncuların muhtemel stratejilerinin ve fayda fonksiyonlarının, tüm oyuncular için ortak bilgi olduğu oyunlar, tam bilgili oyunlardır. Eksik bilgili oyunlar ise oyunun bazı öğelerinin ortak bilgi olmadığı oyunlardır (Bonanno, 2015). Başka bir deyişle, bir oyunda bazı oyuncular tarafından bilinen bilgi, diğer oyuncular tarafından bilinmiyorsa bu tür bilgiye özel bilgi (private information) denir ve bu tür bilginin mevcut olduğu oyunlara ise eksik bilgili oyun denir (Montet ve Serra, 2003). Bu oyunlar, oyuncuların diğer oyuncuların stratejileri, tipleri veya ödül fonksiyonları hakkında tam bilgiye sahip olmadığı durumları kapsar. Bu eksik bilgi, oyuncuların karar alma süreçlerinde belirsizliğe yol açar ve stratejik etkileşimlerini karmaşık hale getirir (Aumann ve Heifetz, 2002).

Eksik bilgili oyunlarda oyunculardan en az biri, diğer oyuncular hakkında eksik bilgiye sahiptir. Buna örnek olarak günlük hayatta firmalar birbirinin teknoloji düzeyini ve maliyet yapılarını bilmeyebilirler, ihaleye katılanlar ya da pazarlığa girenler birbirlerinin kafasındaki değerleri bilmeyebilirler (Çevikkan, 2010). Bu tür durumlar, tam bilgi varsayımının gerçek hayatta stratejik etkileşimler için oldukça kısıtlayıcı olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda Nash dengesinin tam bilgi gereksinimi karşılanmadığından, Nash dengesi daha gerçekçi olan eksik biligili oyunlara uyarlanmalıdır (Montet ve Serra, 2003).

Eksik bilgili oyunlar, özellikle ekonomik ve sosyal bilimlerde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin, pazar rekabetinde firmalar rakiplerinin maliyet yapıları veya piyasa talebi hakkında tam bilgiye sahip olmayabilirler. Bu durumda, firmalar kendi üretim ve fiyatlandırma stratejilerini belirlerken rakiplerinin potansiyel hareketlerini tahmin etmek zorunda kalırlar (Akerlof, 1970).

3.1. Eksik Bilgili Statik Oyunlar

Eksik bilgili statik oyunlar, oyunculardan en az birinin diğer oyuncuların bazı özellikleri veya stratejileri hakkında eksik bilgiye sahip olduğu ve tüm oyuncuların eş zamanlı olarak hareket ettiği oyunlardır. Bu tür oyunların çözümünde sıklıkla başvurulan temel yöntemlerden biri Bayesyen Nash dengesi olup, oyuncuların stratejilerini diğer oyuncuların bilinmeyen özelliklerine dair rassal inançlara dayalı olarak belirlemelerini gerektirir. Bir diğer önemli yöntem ise Harsanyi (1967) tarafından geliştirilen Harsanyi dönüşümüdür. Harsanyi, eksik bilgi durumlarını kusurlu bilgi içeren kapsamlı oyunlara dönüştürerek, bu oyunların analizini daha sistematik ve anlaşılır hale getirmiştir. Bu dönüşüm, oyuncuların olası tüm bilgi setlerini ve bunlara ilişkin olasılık dağılımlarını içeren yeni bir oyun formu oluşturur, böylece oyunun çözümü Bayesyen Nash dengesi ile daha kolay analiz edilebilir hale gelir.

Eksik bilgiye sahip bir oyunda, oyuncular diğer oyuncuların daha önce yaptıkları hamleleri bilmezler. Bu bilgi eksikliği, önceki eylemleri gözlemleyememekten veya oyunun belirli özelliklerini bilmemekten kaynaklanabilir. Örneğin, eş zamanlı hareket oyununda, her oyuncu başkalarının seçimlerini bilmeden stratejisini seçmek zorundadır. Bu senaryo, oyuncuların rakiplerinin tüm olası eylemlerini dikkate almalarını gerektiren stratejik bir ortam oluşturur (Peters, 2008).

3.1.1. Bayesyen Nash Dengesi

Eksik bilgiyi modellemek için sıklıkla Bayesyen oyunlar kullanılır. Bu oyunlar, oyuncuların bilinmeyen faktörler hakkındaki inançlarını, olasılık dağılımları aracılığıyla temsil eder. Her oyuncunun özel bilgilerini özetleyen bir "tipi" vardır ve diğer oyuncuların tipleri hakkında inançlara sahiptirler. Bayesyen oyunlarda kullanılan denge kavramı, oyuncuların diğerleri hakkındaki inançlarına dayalı olarak stratejilerini optimize ettikleri Bayesyen Nash dengesi olarak adlandırılır (Munoz-Garcia ve Toro-Gonzalez, 2019). Başka bir değişle bu tür oyunlar, oyuncuların birbirlerinin stratejileri ve tipleri hakkında tam bilgiye sahip olmadığı durumları ele alır. Her oyuncu, kendi tipi ve rakiplerinin tiplerine dair belirli bir olasılık dağılımına (öncül) sahiptir. Bayesyen denge, her oyuncunun kendi tipine ve rakiplerinin tiplerine dayalı olarak en iyi stratejiyi seçtiği durumları tanımlar (Volij, 2009; Harsanyi, 1967-8).

Tanım; $G = \{A_1, \ldots, A_n;\ T_1, \ldots, T_n;\ p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}$ gibi statik Bayesyen oyunda eğer her i oyuncusunun her $t_i \in T_i$ tipi gibi aşağıdaki problemi çözen hareket profili, $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$, varsa bu (pür strateji) Bayesyen Nash dengesidir (Gibbons, 1992). Aşağıdaki gibi formülize edilir:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(a_1^*(t_1), \ldots, a_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, a_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, a_n^*(t_n))p_i(t_{-i}/t_i)$$

N sayıda sınırlı oyuncunun olduğu bir Bayesyen oyununda [n sayıda sınırlı oyuncunun olduğu ve hareket $(A_1, \ldots, A_n)$ ve tip $(T_1, \ldots, T_n)$ kümelerinin sınırlı olduğu bir oyun] Nash dengesinin olması mümkündür. Bu denge, karma stratejiler şeklinde olacaktır. Bu durumun ispatı, aynı zamanda tam bilgili sınırlı oyunlardaki karma strateji dengesinin ispatına benzemektedir. Tam bilginin olduğu bir oyunda karma strateji Nash dengesi, eksik bilgili bir oyundaki Bayesyen Nash dengesi olarak yorumlanabilir (Gibbons, 1992).

Örnek; Oyunda piyasaya hâkim (oyuncu I) ve piyasaya girme niyetinde olan (oyuncu II) iki firma vardır. Piyasaya girmeyi isteyen firmanın "gir" ve "girme" gibi iki tane hareketi vardır. Mevcut firmanın ise "genişle" ve "genişleme" gibi iki tane hareketi vardır. Yani mevcut firma ya üretim ölçeğini büyütecek ya da aynı düzeyde kalacaktır. Firmalar, aynı anda karar verdikleri için bu bir statik oyundur. Piyasaya girme niyetinde olan firmanın kararı, mevcut firmanın genişleyip genişlememesine bağlı iken, mevcut firmanın kararı ise maliyetlerin düşük ya da yüksek olmasına bağlıdır. Ancak piyasaya girme niyeti olan firma, mevcut firmanın maliyet yapısı hakkında bir bilgiye sahip değildir. Görüldüğü gibi bu oyun, eksik bilgili statik bir oyundur (Yılmaz, 2016).

Piyasaya girme niyetinde olan firmanın, mevcut firmanın maliyetine bağlı olarak bir inancı oluşmalıdır. Bu da firmanın belirsizlik altında karar verme durumunu gösterir. Belirsizlik altında karar verme, Bayesyen oyunların temel kavramını oluşturur. Bu oyunda, iki durum söz konusudur. Bunlar; c_L (düşük maliyet) ve c_H (yüksek maliyet)'dir (Bierman ve Fernandez, 1998).

Tablo 19. Giriş Oyunun Bayesyen Çözümü

		1. Oyuncu			**1. Oyuncu**	
		Genişle (G_1)	Genişleme (G_2)		Genişle (G_1)	Genişleme (G_2)
2.Oyuncu	*Gir* (g_1)	*-1,2*	1,1	Gir (g_1)	*-1,-1*	1,1
	Girme (g_2)	0,4	*0,3*	Girme (g_2)	0,0	*0,3*
		Düşük Maliyet (p)			Yüksek Maliyet (1-p)	

Kaynak: Bierman ve Fernandez (1998: 275).

Tablo 19'da görüldüğü gibi piyasaya girme niyetinde olan firma (oyuncu II); p olasılıkla mevcut firmanın düşük maliyetli (c_L), 1-p olasılıkla da yüksek maliyetli (c_H) olduğuna inanmaktadır. Bu bağlamda oyuncu II, p olasılıkla düşük maliyetli, 1-p olasılıkla da yüksek maliyetli oyunu oynayacaktır. Aynı zamanda bu oyun, üç oyunculu olarak da düşünülebilir. Bunlar piyasaya girme niyetinde olan firma, mevcut firma ve doğadır. Mevcut firmanın maliyet yapısını doğanın belirlediği ve sadece mevcut firmaya bildirdiği varsayılır. Bu bağlamda mevcut firma, kendi tipini gözlemleyebilmesine karşılık; piyasaya girme niyetinde olan firma, bunu gözlemleyemez ve sadece mevcut firmanın iki tipe sahip olduğunu ve hangi tipte olacağını belli olasılıklarla bilir (Yılmaz, 2016).

Piyasaya girme niyetinde olan firma, mevcut firmanın her bir tipi için bir inanç oluşturmalıdır, yani her tipin olma olasılığına sahip olmalıdır. Bu yolla beklenen faydasını belirler. Örneğin piyasaya girme niyetinde olan firma "gir" hareketini seçtiğinde, mevcut firma ise p=2/3 olasılıklı düşük maliyet tipindeki "genişle" hareketini seçerse elde edeceği fayda düzeyi -1 olur; eğer p=1/3 olasılıklı yüksek maliyetli "genişle" hareketini seçerse fayda düzeyi yine -1 olacaktır. Bu şekilde piyasaya girme niyetinde olan firmanın beklenen faydası; (2/3).(-1) + (1/3).(-1) = -1 olur (Bierman ve Fernandez, 1998).

Tablo 20'de her bir satır ve sütunda bulunan ilk rakam piyasaya girme niyetinde olan firmanın beklenen fayda düzeyini, parantez içindeki rakamlardan ilki düşük maliyetli tip seçimi, 2. rakam ise yüksek maliyetli tip seçimi sonucunda mevcut firmanın elde edeceği faydasını göstermektedir.

Tablo 20. Giriş Oyununda Firmaların Hesaplanan Faydaları

		1. Oyuncu			
		(G_1, G_1)	***(G_1, G_2)***	***(G_2, G_1)***	***(G_2, G_2)***
2.Oyuncu	*g_1*	-1,(2,-1)	-1/3,(2,1)	1/3, (1,-1)	1, (1,1)
	g_2	0, (4,0)	**0, (4,3)**	0, (3,0)	0, (3,3)

Kaynak: Bierman ve Fernandez (1998: 275).

Tablo 20'de verilen (g_1, (G_1, G_1)) = (-1, (2,-1)) strateji profiline bakıldığında; piyasaya girme niyetinde olan firma g_1 hareketini seçtiğinde; mevcut firma düşük maliyetli tipte G_1'i seçerse faydası 2, yüksek maliyetli tipte G_1'i seçerse faydası -1 olur. Piyasaya girme niyetinde olan firmanın beklenen faydası ise (2/3).(-1) + (1/3).(-1) = -1 olur.

Farklı tiplere sahip olan mevcut firmanın en iyi tepkisinin ne olduğuna bakılırsa düşük maliyetli tipte "genişle" (G_1), yüksek maliyetli tipte ise "genişleme" (G_2) baskın stratejisine sahip olduğu görülür. Bu bağlamda piyasaya girme niyetinde olan firma, piyasaya girerse (g_1) beklenen faydası -1/3, girmezse (g_2) beklenen faydası 0 olur. Sonuç olarak mevcut firma baskın stratejisini seçerken diğer firma ise dışarıda kalmayı tercih edecektir ve Bayesyen Nash dengesi (girme, (genişle, genişleme)) = ($g_{2,}$ ($G_{1,}$ G_2)) şeklinde olacaktır (Fudenberg ve Tirole, 1991).

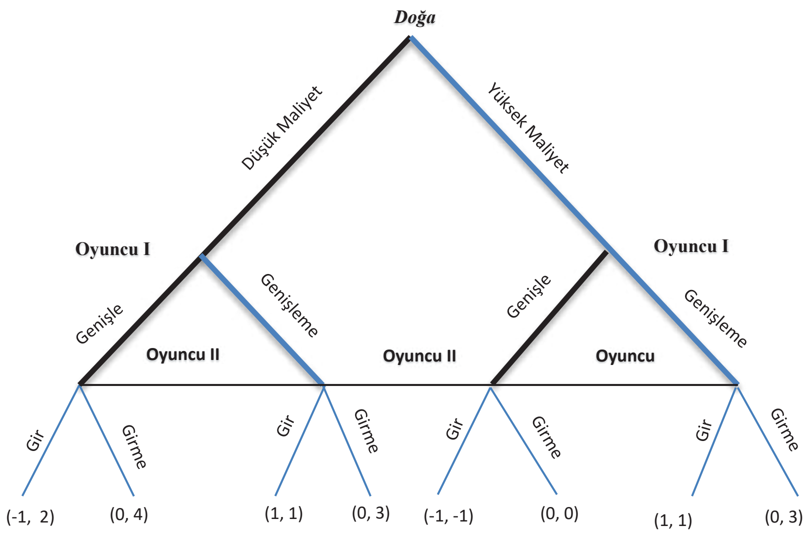
3.1.2. Harsanyi Dönüşümü

Eksik bilgiyle ilgili ilk çalışmalar, Harsanyi (John Nash ve Reinhard Selten ile birlikte) tarafından 1967 yılında kaleme alınmıştır. Ayrıca 1994 yılında Harsanyi, bu çalışmalarıyla Nobel Ekonomi Ödülü'nü almıştır. Harsanyi (1967), eksik bilgi durumunu kusurlu bilgi içeren kapsamlı bir oyuna dönüştürerek bir yöntem geliştirmiştir (Bonanno, 2015). Harsanyi dönüşümü olarak adlandırılan bu yöntem, oyun teorisinde eksik bilgiye sahip oyunların analizinde kullanılan önemli bir yöntemdir. Bu yöntem, oyuncuların strateji setleri ve ödemeleri hakkında belirsizliklerin olduğu oyunları modellemeye olanak tanır. Harsanyi dönüşümü, eksik bilgiye sahip oyunları kusurlu bilgi içeren oyunlara dönüştürerek analiz etmeyi mümkün kılar. Harsanyi dönüşümünde, "doğa" adlı hayali bir oyuncu tanıtılır. Bu oyuncu, her oyun başlangıcında her oyuncuya bir "tip" atar. Bu tipler, oyuncuların sahip olduğu özel bilgileri ve diğer oyuncuların türlerine dair olasılık dağılımlarını içerir. Böylece, her oyuncu kendi tipine ve diğer oyuncuların tiplerine dair inançlarına dayanarak stratejilerini belirler (Hu ve Stuart, 2002). Doğanın seçimine ilişkin bilgi, oyuncular arasında asimetriktir, fakat oyuncular doğanın tercihi hakkında bir ön inanışa sahiptirler. Oyuna başlayan her bir oyuncu, kendisi için özel bilgiye sahipken rakiplerinin tercihleri hakkında sadece olasılığa dayalı bir bilgiye sahiptir (Fudenberg ve Tirole, 1991; Karabacak, 2008).

Oyuncuların kendi rakipleri hakkındaki belirsizlikler, tüm oyuncuların muhtemel tiplerini tanımlayan tercihleri oyuna dâhil edilerek modellenir. Bu şekilde oyun, tam bilgili fakat mükemmel olmayan bilgili bir oyuna dönüştürülür (Osborne ve Rubinstein, 1994). Aynı zamanda bu dönüşüme Harsanyi dönüşümü denilmektedir (Bierman ve Fernandez, 1998).

Tablo 20'deki örnekte verildiği gibi oyuncular, hem kendi hem de rakip oyuncuların muhtemel tercihleri sonucunda elde edecekleri fayda düzeyini bilmekle beraber doğanın ön hareketini gözlemleyememektedir.

Mevcut firma (oyuncu I), "düşük maliyet" ve "yüksek maliyet" gibi iki tane hem tercihe hem de özel bilgiye sahiptir. Doğa, tüm oyuncular için genel bilgi olan olasılıklı dağılıma göre ilk hareketi seçer ve mevcut firmanın hareketine yön verir. Rakip firma (oyuncu II) da mevcut firmanın tercihini gözlemleyemediği için eksik bilgiye sahiptir. Şekil 16'da gösterildiği gibi doğa, mevcut firma ve rakip firmanın olduğu üç oyunculu oyun, Harsanyi dönüşümü ile mükemmel olmayan bilgili bir oyuna çevrilmiştir (Slantchev, 2008b).



Kaynak: Fudenberg ve Tirole (1991: 210).

Şekil 16. Harsanyi Dönüşümü ile Eksik Bilgili Oyunun Mükemmel Olmayan Bilgili Bir Oyuna Çevrilmesi

3.1.3. Asimetrik Bilgi Altında Cournot Rekabeti

Asimetrik bilgi altında Cournot rekabeti, genellikle Bayesyen oyunlar çerçevesinde analiz edilir. Bu oyunlarda firmalar, rakiplerinin maliyetleri hakkında olasılık dağılımlarına dayalı inançlara sahiptirler ve bu inançlara göre stratejilerini belirlerler. Bayesyen Nash dengesi, her firmanın kendi inançlarına ve diğer firmaların stratejilerine en iyi tepkiyi verdiği durumu tanımlar (Hu, Xiao, ve Zhou, 2014).

Bu rekabet modelinde, iki firma vardır. Bunlar, 1. ve 2. firma olarak tanımlanmaktadır. Piyasanın ters talep fonksiyonu; $p(Q) = a - Q$ şeklindedir. İki firmanın toplam üretim düzeyi; $Q = q_1 + q_2$, 1. firmanın maliyet fonksiyonu; $C_1(q) = cq_1$ dir. 1. firma kendi maliyet fonksiyonundan haberdardır fakat 2. firma maliyet fonksiyonunu bilmemektedir. 2. firmanın maliyet fonksiyonu θ olsılıkla; $C_2(q) = c_h q_2$ yüksek maliyetli, $1 - \theta$ olasılıkla $C_2(q) = c_l q_2$ düşük maliyetli ve $c_h > c_l$

gibi bir ilişki söz konusudur. Bu bağlamda 1. firmanın tip uzayı; $T_1 = \{c\}$, 2. firmanın tip uzayı ise $T_2 = \{c_h, c_l\}$'dir. 1. firmanın, rakibi olan 2. firmanın maliyet yapısını bilmemesinin sebebi; 2. firmanın hem piyasaya yeni girmesi hem de yeni bir üretim teknolojisi geliştirmesi durumu olabilir. Diğer tüm bilgiler ise ortak bilgidir. Yani 1. firmanın bilgi düzeyi ve tecrübesi, 2. firmanınkinden daha fazladır ve 2. firma, bu durumun 1. firma tarafından bilindiğini bilir ve bu bilgi bu şekilde ilerler (Florida State Univesty, 2019; Slantchev, 2008b).

İki tipe sahip olan 2. firmanın olası kâr fonksiyonu (Gibbons, 1992; Koçkesen, 2019a) aşığıdaki gibi olur:

- ✓ Düşük maliyetli kâr fonksiyonu: $\pi_2(q_1, q_2, c_l) = [(a - q_1 - q_2) - c_l]q_2$
- ✓ Yüksek maliyetli kâr fonksiyonu: $\pi_2(q_1, q_2, c_h) = [(a - q_1 - q_2) - c_h]q_2$
- ✓ 1. firmanın sahip olduğu tek kâr fonksiyonu ise aşaığıdaki gibi olur:

$$\pi_1(q_1, q_2, c) = [(a - q_1 - q_2) - c]q_1$$

2. firma üretim düzeyini marjinal maliyete göre belirler. Bu bağlamda eğer marjinal maliyet yüksek olursa daha düşük bir marjinal maliyete göre üretim yapar. Bu durumda optimizasyon çözümü ile yüksek ve düşük maliyete göre optimum üretim miktarları bulunur:

$$q_2^*(c_h) \rightarrow \max_{q_2}[(a - q_1^* - q_2) - c_h]q_2$$

$$q_2^*(c_l) \rightarrow \max_{q_2}[(a - q_1^* - q_2) - c_l]q_2$$

1. firma θ olsılıkla üretim düzeyinin $q_1^*(c_h)$, $1 - \theta$ olasılıkla da üretim düzeyinin $q_1^*(c_l)$ olacağını beklemektedir. Bu durumda 1. firmanın üretim düzeyi:

$$q_1^*(c) \rightarrow \max_{q_1} \theta\left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_h)\right) - c\right]q_1 + (1-\theta)[(a - q_1 - q_2^*(c_l) - c)]q_1.$$

1. ve 2. firmanın optimizasyon problemlerinin 1. sıra koşulu yazılırsa:

$$q_2^*(c_h) = \frac{a - q_1^* - c_h}{2}, \qquad q_2^*(c_l) = \frac{a - q_1^* - c_l}{2}$$

$$q_1^* = \frac{\theta\left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_h)\right) - c\right] + (1-\theta)[(a - q_1 - q_2^*(c_l) - c)]}{2}$$ olur.

Yukarıdaki sonuçlar, aynı anda çözüldüğünde aşağıdaki üretim düzeyleri elde edilmektedir (Gibbons, 1992; Koçkesen, 2019a):

$$q_2^*(c_h) = \frac{a - 2c_h + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_h - c_l)$$

$$q_2^*(c_l) = \frac{a - 2c_l \ + c}{3} + \frac{\theta}{6}(c_h - c_l), \qquad q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_h + (1-\theta)c_l}{3}$$

Sonuç olarak eksik bilgili statik Cournot oyunun çözümü; q_1^*, $q_2^*(c_l)$, $q_2^*(c_h)$ olarak tespit edilmiştir. Bu bağlamda 1. firmanın stratejisi q_1^*, 2. firmanın stratejisi ise $q_2^*(c_l)\ ve\ q_2^*(c_h)$'dir. Yani 2. firma maliyet yapısına göre hareket ederek üretim düzeyini belirleyebilir. Fakat 1. firma (piyasaya giren firma), üretim düzeyini belirlemek için 2. firmanın maliyet yapısını dikkate almak zorundadır. Denge için 1. firmanın 2. firmanın stratejisine en iyi tepkisi, 2. firmanın her bir maliyet tipine bağlı bir çift üretim düzeyi şeklinde olmalıdır. Aksi durumda 1. firmanın stratejisi, 2. firmanın stratejisine en iyi tepki olmaz (Gibbons, 1992; Slantchev, 2008b).

Şimdi bu oyundaki mevcut durumu, tam bilgi altındaki Cournot üretim değerleri ile karşılaştıralım. Firmaların maliyetlerinin sırasıyla c_1 ve c_2 olduğu ve her iki firmanın pozitif üretim yaptığı varsayılsın. Bu durumda üretim düzeyleri; $q_i^* = \frac{(a-2c_i+c_j}{3}$ ve $q_j^* = \frac{(a-2c_j+c_i}{3}$ olur. Fakat eksik bilgi altında $q_2^*(c_h)$üretim düzeyi, $\frac{a-2c_h\ +c}{3}$'den daha büyük; $q_2^*(c_l)$ üretim düzeyi ise $\frac{a-2c_l\ +c}{3}$'den daha küçüktür (1. firmanın marjinal maliyeti c, 2. firmanın marjinal maliyeti c_l ve c_h'dir.). Bunun sebebi 2. firmanın marjinal maliyete göre üretim yapması, 1. firmanın ise bu duruma tepki verememesidir. Bu durumu daha da açarsak; örneğin, eğer 2. firmanın maliyeti yüksek ise daha az üretim yapar, buna karşın 1. firma ise bu durumu bilmediğinden yine de kârını maksimize eden üretim miktarını seçer. Fakat bu durum 1. firmanın, 2. firmanın üretim düzeyini bilmesi nedeniyle, normalde yapacağı üretim düzeyinden daha az üretimde bulunması ile sonuçlanır. Buna karşın 2. firma yüksek maliyetli yapısına rağmen daha fazla üretimde bulunur. Yani 2. firma, 1. firmanın eksik bilgi düzeyini kendi menfaatine çevirmiş olur (Yılmaz, 2016).

Örnek: Asimetrik bilgi altında Cournot rekabetinde bulunan iki firmanın olduğu varsayılsın. Bu iki firmanın karşı karşıya oldukları talep fonksiyonu; P= 150-Q'dir. Toplam endüstriyel çıktı düzeyi; $\mathrm{Q} = q_1 + q_2$'dir. Firma 1'in maliyet fonksiyonu; $c_1 = \$30$, firma 2'nin θ olasılıkla maliyet düzeyi $c_2^H = \$\,45$ ve $1-\theta$ olasılıkla maliyet düzeyi ise $c_2^L = \$\,15$'dır. Firma 2 hem kendi maliyet düzeyini hem de rakibi olan firma 1'nin maliyet düzeyini bilmektedir. Firma 1 ise kendi maliyet düzeyini biliyor; fakat rakibi olan firma 2'nin θ olasılıkla maliyet düzeyini $\mathrm{c}_2^{\mathrm{H}} = \$\,45$ ve $1-\theta$ olasılıkla maliyet düzeyini ise $\mathrm{c}_2^{\mathrm{L}} = \$\,15$ olarak bilmektedir (Özertürk, 2019).

- ✓ Firma 2'nin üretim için yüksek maliyet tipli en iyi tepki fonksiyonunun türetilmesi;

$$\pi_2^H(q_1, q_H) = (150 - q_1 - q_H)q_H - 45q_H$$

- ✓ 1.sıra koşulu için türev alındığında; $\frac{\partial \pi_2^H(q_1,q_H)}{\partial q_H} = 150 - 2q_H - q_1 - 45$

En iyi tepki fonksiyonu; $q_H^* = 52.5 - \frac{q_1}{2}$ olur.

- ✓ Firma 2'nin üretim için düşük maliyet tipli en iyi tepki fonksiyonunun türetilmesi;

$$\pi_2^H(q_1, q_L) = (150 - q_1 - q_L)q_L - 15q_L$$

- ✓ 1. sıra koşulu için türev alındığında; $\frac{\partial \pi_2^L(q_1,q_L)}{\partial q_L} = 150 - 2q_L - q_1 - 15$

En iyi tepki fonksiyonu; $q_L^* = 67.5 - \frac{q_1}{2}$ olur.

- ✓ Şimdi Firma 1'in üretim için en iyi tepki fonksiyonu;

$$\pi_1(q_1, q_L, q_H) = \theta[(150 - q_1 - q_H)q_1 - 30q_1] + (-\theta)[(150 - q_1 - q_L)q_1 - 30q_1]$$

- ✓ 1.sıra koşulu için türev alındığında;

$$\theta(150 - 2q_1 - q_H - 30) + (1 - \theta)(150 - 2q_1 - q_L - 30) = 0$$

$$q_1^* = \frac{\theta(120 - q_H) + (1 - \theta)(120 - q_L)}{2} \text{ olur.}$$

- ✓ Bayesyen denge için q_1^*, q_H^* ve q_L^*'nin çözümleri sırasıyla; $2q_1^* = \theta(120 - q_H) + (1 - \theta)(120 - q_L)$, $q_H^* = 52.5 - \frac{q_1^*}{2}$, $q_L^* = 67.5 - \frac{q_1^*}{2}$ şeklinde olur.
- ✓ Elde edilen veriler sırasıyla yerine koyulursa:

$$2q_1^* = \theta\left(120 - 52.5 - \frac{q_1^*}{2}\right) + (1 - \theta)(120 - 67.5 - \frac{q_1^*}{2})$$

$$2q_1^* = \frac{q_1^*}{2} + 67.5\theta + (1 - \theta)52.5$$

$$\frac{3q_1^*}{2} = 15\theta + 52.5 \rightarrow q_1^* = 35 + 15\theta$$

- ✓ Firma 1'in en iyi tepki üretim düzeyi bulunduktan sonra firma 2'nin yüksek ve düşük maliyet tipli üretim düzeyleri de; $q_H^* = 35 - 5\theta, q_L^* = 50 - 5\theta$ olur.

Firma 1, θ olasılıkla yüksek maliyetli bir rakiple karşı karşıya geldiğinde, üretim düzeyi seçiminde daha agresif hale gelir. Dolayısıyla θ olasığı arttıkça hem düşük hem de yüksek maliyetli rakipler üretim düzeylerini düşürürler (Özertürk, 2019).

3.2. Eksik Bilgili Dinamik Oyunlar

Daha önceki konularda değindiğimiz gibi, oyuncular karar verme süreçlerinde genellikle tam bilgiye sahip değildir. Örneğin, stratejik formda bir oyunda, bir oyuncu hamle yaparken rakiplerinin seçimlerini bilmez. Mükemmel bilgili genişletilmiş formda bir oyunda ise bir oyuncu, rakiplerinin gelecekteki hamlelerini tahmin edemez. Benzer şekilde, Bayesyen bir oyunda da bir oyuncu, rakiplerinin özel bilgilerini veya yapacakları hamleleri bilemez. Eksik bilgili dinamik oyunlar, bu tür oyunlara benzer özellikler gösterir. Bu oyunlarda, oyuncular rakiplerinin önceki hamlelerini ve özel bilgilerini bilmezler. Bu bağlamda, eksik bilgili dinamik oyunlarda da oyuncular, bilmedikleri parametreler hakkında beklentiler oluşturur. Ancak, bu beklentiler diğer oyuncuların beklentilerinden farklı olabilir. Örneğin, bir oyuncu rakiplerinin maliyet yapıları hakkında tam bilgiye sahip değilse, bu oyuncu kendi stratejisini belirlerken rassal inançlara dayanarak hareket eder. Bu durum, oyuncuların stratejik kararlarını daha karmaşık hale getirir ve oyunun çözümünü zorlaştırır (Karabacak, 2018; Gibbons 1997; Yılmaz, 2016; Ateş, 2018).

Eksik bilgili dinamik oyunlarda stratejik biçimli oyunlardan farklı olarak beklentiler sadece oyuncuların denge stratejilerinden üretilmez, çünkü bazı durumlarda oyuncular denge davranışı ile tutarlı olmayan durumlarla da karşı karşıya kalabilirler. Yani Bayesyen oyunlarda olduğu gibi sadece doğanın hareketleri ve denge davranışlarından beklentiler türetilmez. Aynı zamanda mükemmel bilgili genişleyen oyunların aksine, beklentiler sadece gelecekteki davranışlar üzerine kurulmaz, geçmiş olaylarla da ilişkilendirilir (Yılmaz, 2016).

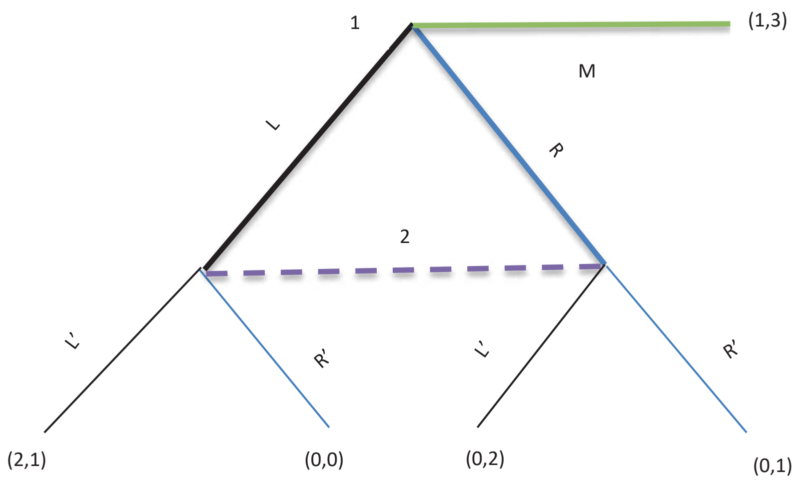
Bu bölümde gösterilen denge kavramı ile birlikte, şimdiye kadar dört tane özel denge durumu verilmiştir. Bunlar sırasıyla; tam bilgili statik oyunlarda Nash denge, alt oyun tam bilgili dinamik oyunlarda mükemmel Nash dengesi, eksik bilgili statik oyunlarda Bayesyen Nash denge ve eksik bilgili dinamik oyunlarda ise mükemmel Bayesyen Nash dengesidir (Gibbons, 1992).

3.2.1. Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi

Mükemmel Bayesyen Nash dengesi, oyuncuların kararlarını hem stratejik olarak hem de bilgiye dayalı olarak güncellemelerini gerektirir. Bu denge, Bayesyen Nash dengesini ve alt oyun mükemmelliğini birleştirir ve oyuncuların oyun boyunca bilgi setlerini güncellemelerini sağlar (Munoz-Garcia ve Toro-Gonzalez, 2019a).

Eksik bilgili dinamik oyunların bilgi kümesi, birden fazla karar kavşağını içinde barındırdığı için "alt oyun" kavramı yerine "devam" ya da "sürek oyunu" kavramı da kullanılır. Çünkü sürek oyunu sadece tek bir kavşağın bulunduğu bilgi kümesinden değil, herhangi bir bilgi kümesinden başlayabilir. Mükemmel Bayesyen Nash dengesinde, oyundaki yerini ve bulunduğu kavşağı tam olarak bilmeyen oyuncuların oyunun her aşamasında üstlendikleri stratejilerin, rakip stratejilerine karşı en iyi tepki olduğu varsayılır. Yani herhangi bir kavşakta oyuncunun üstleneceği stratejisi, karşı rakibin stratejisine en iyi cevaptır. Devam oyununda herhangi bir oyuncunun stratejisi mükemmel Bayesyen Nash dengesi ise bu strateji, tüm devam oyunlarında Bayesyen dengesi olmayı gerektirir (Karabacak, 2018). Yani alt oyun mükemmel Nash dengesi, herhangi bir oyununda bulunan tüm alt oyunlar için bir Nash dengesi olmasını gerektirir (Gibbons, 1997).

Mükemmel Bayesyen Nash dengesinin anlaşılması için ilk önce bir örnek ile başlanmıştır. Şekil 17'de görüldüğü gibi 1. oyuncunun üç tane hareketi vardır. Bunlar sırasıyla; L, M ve R hareketleridir (Gibbons, 1992).



Kaynak: Gibbons (1992: 178).

Şekil 17. Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi İçin Verilen Örneğin Yaygın Form Gösterimi

Eğer 1. oyuncu M hareketini oynarsa, 2. oyuncuya sıra gelmeden oyun bitmiş olur. Eğer 1. oyuncu M hareketini seçmezse hangi hareketi (kendi özel bilgisi dâhilinde olan L veya R hareket seçimi) seçeceği 2. oyuncu tarafından bilinmez. Bu bağlamda 2. oyuncu L' veya R' hareketinden birini seçer ve oyun biter. Oyun ağacının bitiş noktasına göre oyuncuların fayda düzeyleri belirlenir.

Tablo 21. Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi İçin Verilen Örneğin Normal Form Gösterimi

		2. Oyuncu	
		L'	***R'***
1. Oyuncu	***L***	**2,1**	0,0,
	R	0,2	0,1
	M	1,3	**1,3**

Tablo 21'de oyunun stratejik biçimli gösteriminde görüldüğü gibi, iki tane Nash dengesi vardır; bunlar (L, L') ve (M, R')'dir. Bu Nash dengelerinin alt oyun mükemmel denge olup olmadığının tespit edilmesi için oyunun genişleyen biçimi kullanılır. Dikkat edileceği gibi bu oyunda, oyun dışında başka tek bir alt oyun yoktur. Eğer bir oyunda oyun dışında başka bir alt oyun yoksa, alt oyun mükemmelliği için gerekli koşul olan "oyuncuların stratejileri için her alt oyunda Nash dengesinin olması" durumu bütün oyun için sağlanır. Yani alt oyunun olmadığı oyunlarda, alt oyun mükemmel Nash dengesi aynı zamanda Nash dengesi tanımına uygun bir tanım olur. Buna göre (L, L') ve (M, R') Nash dengeleri alt oyun mükemmel Nash dengesi olur. Ancak 2. oyuncuya sıra geldiğinde L' hareketini oynamak, R' hareketini oynamaktan daha avantajlı olacaktır. Bu bağlamda 1. oyuncu, 2. oyuncuyu R' hareketini oynama tehdidiyle R hareketini oynamaya teşvik etmemelidir (Karabacak, 2008).

Şimdi makul olamayan alt oyun mükemmel Nash dengesi (M, R') strateji profilini devre dışı bırakacak iki koşulu uygulayacağız (Yılmaz, 2016):

1. ***Koşul*****:** Oyuncu oyundaki her bilgi kümesinde sırası gelen her bir oyuncunun hangi düğümde olduğuna dair bir inanca sahip olmalıdır. Tekil olmayan bilgi seti için oluşturulan inanç, düğümler üzerine bir olasılık dağılımıdır. Tekil olan bilgi seti için tek bir karar noktası olduğu için bu noktada bulunma olasılığı 1'dir. Bu durumda oyuncu hangi noktada olduğunu kesin olarak bilir.

2. Koşul: Oyuncuların inançları tanımlandığında, oyuncuların stratejileri sırayla rasyonel olmak zorundadır. Hareket sırası gelen her bir oyuncunun bilgi setinde tanımlanan hareketi (ve oyuncunun sonraki hareketi), oyuncunun bilgi seti ve diğer rakiplerin sonraki stratejileri göz önüne alındığında optimal olmalıdır. Yani oyuncu Nash dengesi stratejisini izlemelidir.

Şekil 16'da 1. koşul bize şunu söyler: Eğer 2. oyuncu tekil olmayan bilgi kümesindeyse (yani bilgi setinde tanımlanan sürek oyunundaysa) hangi karar noktasına varıldığıyla ilgili bir inanç oluşacaktır. Yani 1. oyuncunun L veya R hareketinden hangisini oynadığı hakkında bir inanç oluşur. Bu bağlamda 2. oyuncunun, oyun ağacının sol karar noktasında olma olasılığı p ve sağ karar noktasında olma olasılığı 1-p olsun (Gibbons, 1992).

2. oyuncunun inancını (p,1-p) veri aldığımızda; R' hareketi oynandığında beklenen fayda düzeyi p.0+(1-p).1= 1-p olur iken L' hareketinin oynaması halinde beklenen fayda düzeyi ise p.1+(1-p).2= 2-p olur. Bu durumda herhangi bir p değeri için $2-p>1-p$ olur. Bu durumda 2. koşulda belirtilen durum düşünüldüğünde, 2. oyuncunun R' hareketini oynamaması gerekir. Sonuç olarak her bir oyuncunun bir inanca sahip olduğu ve bu inanca göre hareket ettiği baz alındığında, (M, R') stratejisinin mahkûm bir strateji olduğu ortaya çıkar ve bu strateji elenir.

Tanım: Eğer bir oyunda denge stratejilerine göre oyun oynanıyor ve pozitif olasılıklarla bir bilgi setine ulaşılıyorsa bu durumda bu bilgi seti denge patikasıdır. Eğer denge stratejileri takip edildiği halde bir bilgi setine varılamayacaksa bu bilgi seti denge dışı patikadır (Yılmaz, 2016).

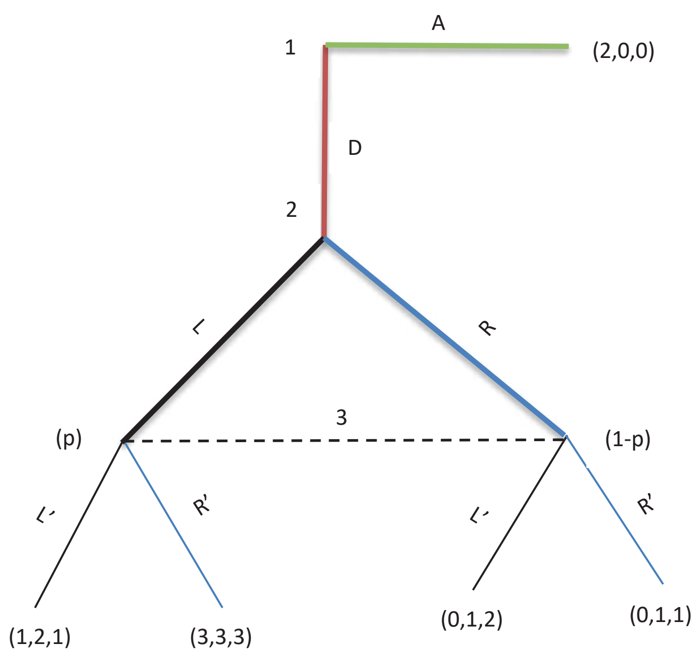
3. Koşul: Bir oyunda bulunan denge patikasının bilgi setindeki inançları, Bayesyen kuralı ve oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenir.

Şekil 16'daki alt oyun mükemmel Nash dengesinde (L, L'), 2. oyuncunun inancının p=1 olmak zorunda olduğunu ispatladık. Yani bu durumda 1. oyuncunun denge stratejisi (L) veri alındığında; 2. oyuncu, bilgi kümesinde hangi düğüme ulaşıldığını bilir. Diğer taraftan, 2. oyuncunun 1. oyuncu hakkında ne tür inançlar oluşturduğu bulunabilir. Örneğin 2. oyuncu, rakibi olan 1. oyuncunun q_1 olasılıkla L hareketini, q_2 olasılıkla R hareketini ve $1-q_1-q_2$ olasılıkla M hareketini seçtiği bir karma stratejiyi takip ettiği üzerine bir inanç oluşturabilir. 3. koşula göre 2. oyuncu, 1. oyuncunun $p=\frac{q_1}{(q_1+q_2)}$ olasılıkla L hareketini oynayacağına dair bir inancı olması gerekir.

Şimdiye kadar gördüğümüz üç koşul, mükemmel Bayesyen Nash dengesinin özünü ifade eder. Bu koşullarla inançlar, denge tanımındaki stratejilerin önem düzeyine yükseltilir. Artık bir denge, sadece her oyuncunun bir stratejiye sahip olduğu durumu değil, aynı zamanda her oyuncunun hareket ettiği bilgi seti için bir inanç içerir (Gibbons, 1992). 3. koşulda belirtildiği gibi her oyuncu sadece denge patikasında bir inanca sahip değildir. Aynı zamanda denge dışı patikada da uygun inançlara sahip olmalıdır.

4. Koşul: Denge dışı patikalarda bilgi setindeki inançlar, Bayesyen kural ve oyuncuların denge stratejileri ile belirlenir. Başka bir deyişle, mükemmel Bayesyen Nash dengesinde Bayesyen güncellemesi, sıfır olasılıkla ulaşılan bilgi setlerine uygulanır (Montet ve Serra, 2003). Bu durumu daha da iyi anlamak için Şekil 17'deki örnek üzerinde duracağız.

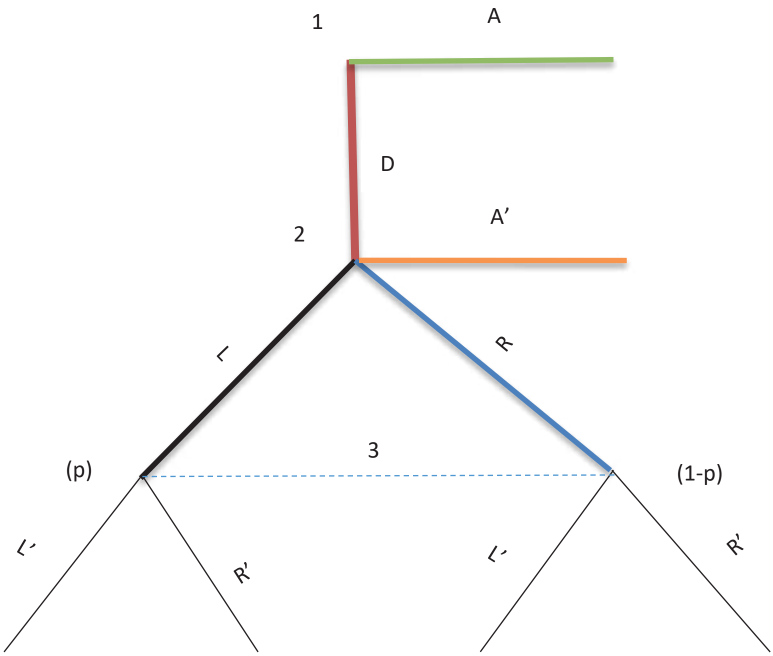
Tanım: Mükemmel Bayesyen Nash dengesi, dört koşulun gereksinimlerini karşılayan stratejiler ve inançlardan oluşur.



Kaynak: Gibbons (1992: 181).

Şekil 18. Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi İçin Verilen 2. Örneğin Oyun Yaygın Form Gösterimi

Bu oyunda, 3. oyuncunun stratejileri ve p=1 inancı 1., 2. ve 3. koşulları sağlamaktadır. Aynı zamanda 4. koşulu da sağlamaktadır. Çünkü denge dışı bir patika olmadığı için bu koşul yerine getirilir ve mükemmel Bayesyen Nash dengesi meydana gelir (Gibbons, 1992).



Kaynak: Gibbons (1992: 182).

Şekil 19. Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi İçin Verilen 3. Örneğin Oyun Yaygın Form Gösterimi

Bu sefer de 3. oyuncu p=0 inancına sahip olduğu durumda, (A, L, L') strateji profiline bakılır. Aynı zamanda bu strateji profili de Nash dengesidir. Bu strateji ve inanç ilk üç koşulu sağlamaktadır. 3. oyuncu sahip olduğu inancı doğrultusunda optimal davranır ve diğer iki oyuncu da rakiplerinin takip eden stratejileri veri alındığında optimal davranış sergilerler. Fakat, oyundaki tek Nash dengesi (L, R') olduğu için bu alt oyun mükemmel olamaz. Bu bağlamda sadece ilk üç koşulun sağlanması bu durum için yeterli olmaz. Buradaki sıkıntı, 3. oyuncunun inancı (p=0) ile 2. oyuncunun L stratejisi arasında bir tutarsızlığın olmasıdır. Diğer taraftan ilk üç koşulun sağlanması, 3. oyuncunun inancı için bir kısıtlamaya neden olmaz. Çünkü oyun belirlenen stratejilere göre oynansaydı 3. oyuncunun bilgi setine ulaşılamazdı. Fakat 4. koşul, 2. oyuncunun 3. oyuncu hakkındaki inancının belirlenmesinde etkili olur. Eğer 2. oyuncu L hareketini seçerse 3. oyuncunun inancı da p=1 olmak zorundadır. Eğer 2.

oyuncu R hareketini seçerse 3. oyuncunun inancının p=0 olması gerekmektedir. Bu bağlamda 3. oyuncunun inancı p=1 ise 2. koşulu sağlaması için R' hareketini seçmesi gerekir. Sonuç olarak (A, L, L') strateji profili ve 3. oyuncunun p=0 inancı dört koşulu sağlayamaz (Yılmaz, 2016).

4. koşulu daha iyi anlamak için Şekil 18'deki örnek üzerinde durulur. Bu oyunda 2. oyuncu 3. bir harekete (A') sahip olsun. Eğer 2. oyuncu A' hareketini oynarsa oyun biter. Eğer 1. oyuncunun denge stratejisi A olursa 3. oyuncunun bilgi seti denge dışı bir patika olur. Bu durumda 4. koşula göre, 2. oyuncunun stratejisinden 3. oyuncunun inancı belirlenemez. Eğer 2. oyuncunun stratejisi A' olursa 4. koşula göre 3. oyunun inançlarının oluşmasında bir engel olmaz. Bu bağlamda 2. oyuncu; L hareketini q_1 olasılıkla, R hareketini q_2 olasılıkla ve A' hareketini ise $1-q_1-q_2$ olasılıkla oynadığı varsayılsın. Bu durumda 4. koşula göre 3. oyuncunun inancının $p = \frac{q_1}{q_1+q_2}$ olması gerekir (Karabacak, 2008).

Yani 3. oyuncunun bilgi setinde sürek oyununun oyun ağacının sol karar noktasında olma olasılığı (2. oyuncunun A' hareketini oynamaması durumunda L hareketini oynama olasılığı), $p = \frac{q_1}{q_1+q_2}$ olarak hesaplanır (Yılmaz, 2016).

3.2.2. Sinyalli Oyunlar

Sinyalli oyun, bir gönderici ve bir alıcının olduğu ve iki aşamadan oluşan iki oyunculu eksik bilgili bir dinamik oyun türüdür. Bu oyunda özel bilgiye sahip olan oyuncu, her iki oyuncunun kazancını etkileyebilecek bir duruma sahiptir (Karabacak, 2018). Özel bilgiye sahip oyuncunun strateji seti bilgiye bağlı sinyallerden oluşur ve eksik bilgiye sahip oyuncunun ise strateji seti sinyallere bağlı eylemlerden oluşur (Sobel, 2007). Yani özel bilgiye sahip oyuncu kendi tipine bağlı olabilecek bir sinyal gönderir, eksik bilgili oyuncu ise gözlemlediği sinyale bağlı bir eylemde bulunur (Lee, 2013).

Sinyalli oyunlarda, genellikle dört temel bileşen vardır (Munoz-Garcia ve Toro-Gonzalez, 2019):

1. Gönderici: Özel bilgiye sahip olan oyuncu.

2. Sinyal: Göndericinin alıcıya gönderdiği bilgi.

3. Alıcı: Sinyali gözlemleyip bir eylemde bulunan oyuncu.

4. Eylemler ya da hareketler: Alıcının sinyale dayanarak yaptığı tercihler.

Bu oyunda iki oyuncu olsun ve bu oyunculardan gönderici G ile alıcı ise A ile gösterilsin.

Oyunun zamanlaması aşağıdaki gibidir:

1. Doğa; $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ tipler kümesinden, $p(t_i)$ gibi bir olasılık dağılımına göre gönderici (G) için bir tip çeker, bu durumda da her i için $p(t_i) > 0$ ve $p(t_1)+\ldots+p(t_n) = 1$

2. Gönderici, t_i tipini gözlemler ve gelen mesajlar kümesinden bir m_j mesajı seçer. Yani bu durumda göndericinin stratejisi, tip kümesinden mesaj kümesine tanımlanan bir fonksiyondur;

$$m: T \rightarrow M$$
$$t_i = m(t_i)$$

3. Alıcı, göndericiden gelen m_j mesajını (t_i tipini değil) ve olası hareketler kümesinden $A = \{a_1, \ldots, a_K\}$, a_K gibi bir hareket tercih eder. Bu durumda alıcının stratejisi, mesaj kümesinden hareket kümesine tanımlanan bir fonksiyon olarak tanımlanır:

$$a: M \rightarrow A,$$
$$m_j = a(m_2).$$

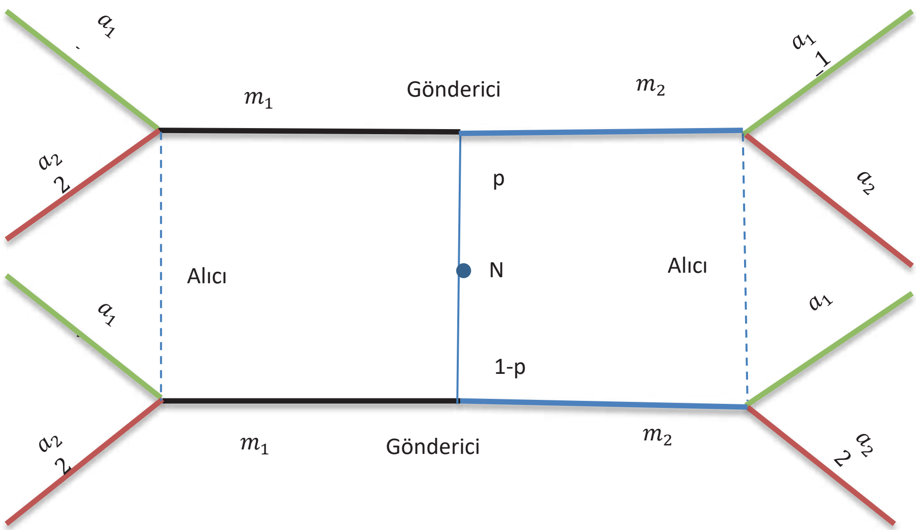
4. Oyuncuların fayda veya kazanç düzeyleri ise $u_G(t_i, m_{j,} a_K)$ ve $u_R(t_i, m_{j,} a_K)$ şeklinde sembollerle tanımlanır (Yılmaz, 2016).

Birçok uygulamada sınırlı kümelerden oluşan A (hareket), T (tip) ve M (mesaj) kümeleri, reel sayılar kümesinde tanımlıdır. Burada ise olası mesajlar kümesi doğanın seçtiği tiplere bağlı iken olası hareketler kümesi ise göndericinin seçtiği mesajlara bağlıdır.

Sinyalli oyunlar, ekonominin birçok dalında oldukça kullanılmaktadır. Örneğin Spence (1973) iş piyasası üzerine yaptığı sinyalizasyon modelinde; "gönderici" işçi, "alıcı" işveren piyasası, "tip" işçinin üretken kabiliyeti, "mesaj" ise işçinin eğitim tercihi ve piyasa tarafından ödenen ücrettir (Spence, 1973). Diğer yandan Myers ve Majluf's'un (1984) kurumsal yatırım ve sermaye yapısı sinyalizasyon modelinde; "gönderici" yeni projeyi finanse etmek için sermayeye ihtiyaç duyan bir firma, "alıcı" potansiyel bir yatırımcı, "tip" firmanın mevcut varlıklarının kârlılığı, "mesaj" ise firmanın finansman karşılığında vereceği hisse senedi teklifi ve yatırımcının yatırım yapıp yapmama konusundaki kararıdır (Myers ve Majluf, 1984).

Örnek: Şekil 19'daki sinyalli oyun, genişleyen bir biçim olarak gösterilmiştir: $\mathrm{T} = \{\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2\}$, $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2\}$, $\mathrm{m} = \{\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2\}$ ve $\mathrm{P_r}\{\mathrm{t}_1\} = \mathrm{p}$. Bu oyun, oyun ağacındaki ilk düğümden başlayıp alttaki terminal noktalarına akıp giden değil, oyun ağacının ortasından, doğanın yaptığı ilk hareketle başlayıp sağ ve sol terminal noktalarına akmaktadır.

Oyundaki strateji, tam bir eylem planıdır. Yani, oyuncuya hareket sırası geldiğinde tüm olası durumlar için hareket tanımlayan bir plandır. Bu nedenle gönderici için saf strateji $m(t_i)$, doğanın seçeceği bir tip için hangi mesajın seçileceğini belirleyen bir fonksiyondur. Alıcının saf stratejisi $a(m_j)$ ise, göndericinin seçtiği her mesaj için hareket belirleyen bir fonksiyondur.



Kaynak: Yılmaz (2016: 241).

Şekil 20. Sinyalli Oyununun Gösterimi

Şekil 19'daki oyunda gönderici ve alıcının her birinin dört tane stratejisi vardır (Gibbons, 1992).

Göderici :

- 1. Stratejisi; eğer doğa t_1 çekerse m_1 oyna, eğer doğa t_2 çekerse m_1 oyna.
- 2. Stratejisi; eğer doğa t_1 çekerse m_1 oyna, eğer doğa t_2 çekerse m_2 oyna.
- 3. Stratejisi; eğer doğa t_1 çekerse m_2 oyna, eğer doğa t_2 çekerse m_1 oyna.
- 4. Stratejisi; eğer doğa t_1 çekerse m_2 oyna, eğer doğa t_2 çekerse m_2 oyna.

Alıcı:

- 1. Stratejisi; gönderici m_1 seçerse a_1 oyna, eğer gönderici m_2 seçerse a_1 oyna.
- 2. Stratejisi; gönderici m_1 seçerse a_1 oyna, eğer gönderici m_2 seçerse a_2 oyna.
- 3. Stratejisi; gönderici m_1 seçerse a_2 oyna, eğer gönderici m_2 seçerse a_1 oyna.
- 4. Stratejisi; gönderici m_1 seçerse a_2 oyna, eğer gönderici m_2 seçerse a_2 oyna.

Göndericinin yukarıdaki stratejilerine bakıldığında, 1. ve 4. stratejilerin aynı tip mesaj verdikleri görülmektedir. Bu yüzden bu stratejilere birleştirici (pooling) stratejiler denilmektedir. Diğer yandan göndericinin 2. ve 3. stratejilerinde ise her tip farklı mesaj verdiği için bu tür stratejilere de ayrıştırıcı (separating) stratejiler denilmektedir. Aynen bu örnekte olduğu gibi iki tipli bir oyunda karma ya da hibrit stratejiler de olabilir. Örneğin t_1 tipi m_1 mesajını oynamasına karşın, t_2 tip ise m_1 ve m_2 arasında rassal seçimde bulunur (Gibbons, 1992).

Bu kısımda sinyalli oyunlarda mükemmel Bayesyen Nash dengenin ne olduğu üzerinde durulmuştur. Daha önce alt oyun mükemmel Bayesyen denge için uyarlanan 1-3 koşulları sinyalli oyunlara tatbik edilirken bütün mesajların patika üzerinde olmasından dolayı 4. koşul tatbik edilmemiştir.

Gönderici bir mesaj için kullanılan tüm tarihleri bildiği için, bu seçim tekil bir bilgi kümesinde meydana gelir. Bu durumda 1. koşul göndericiye uygulandığı zaman sadece bir tane karar noktası ortaya çıkar. Fakat alıcı, göndericinin gönderdiği mesajda göndericinin tipi hakkında bir bilgi sahibi olmadan bir hareket seçer. Bu nedenle alıcının seçimi tekil olmayan bir bilgi kümesidir (Yılmaz, 2016).

Alıcıya 1. koşul uygulandığında:

1. Sinyalleme Koşulu : Alıcı, M mesajlar kümesinden gözlemlediği bir m_j mesaj ile hangi tiplerin m_j mesajı gönderdiği hakkında bir inanca sahip olmak zorundadır. Bu durumda bu inanç, $\mu(t_i \backslash m_j)$ olasılığı ile gösterilebilir. Burada her tip $t_i \in T_i$ için, $\mu(t_i \backslash m_j) \geq 0$ ve $\sum_{t_i \in T} \mu(t_i \backslash m_j) = 1$ olmalıdır. Hem göndericinin mesajı hem de alıcının inancı veri alındığında, alıcının optimal hareket ettiği söylenilebilir.

Alıcıya 2. koşul uyguladığında:

***2. Sinyalleme Koşulu I*:** Alıcı, M mesajlar kümesinden her m_j mesajı için, alıcı tipler hakkındaki $\mu(t_i \backslash m_j)$ inancı doğrultusunda $a^*(m_j)$

hareketini seçerek beklenen faydasını maksimize eder. Bu durumda $a^*(m_j)$ hareketi aşağıdaki problemi çözen bir değer olur:

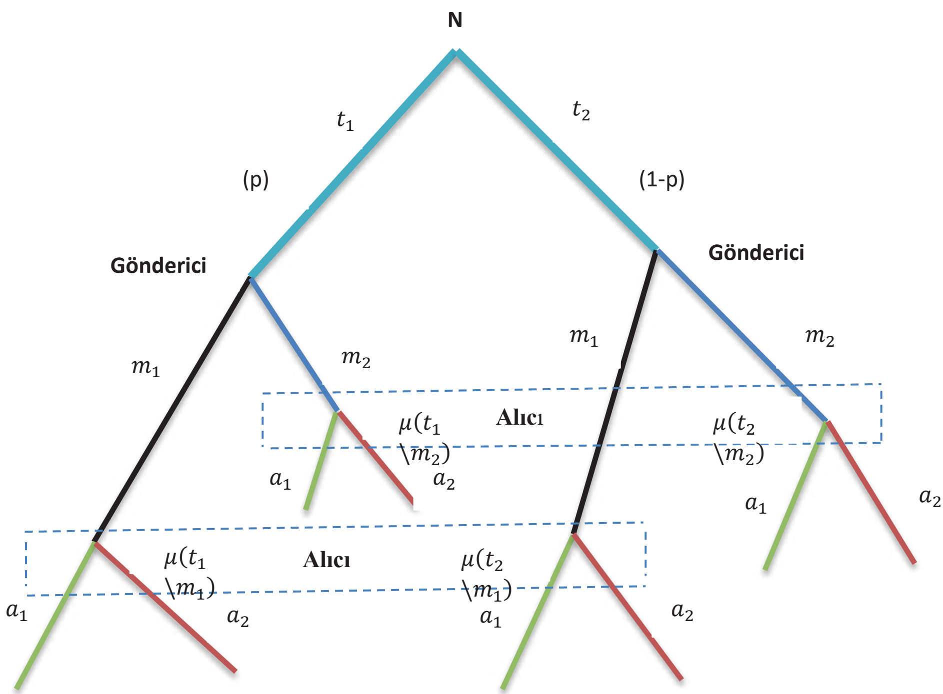
$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i \backslash m_j) u_R(t_i, m_i, a_K).$$

2. koşul göndericiye uygulansa bile tam bilgiye sahip olduğu için inancının ifade edilmesi önemli değildir. Göndericinin oyunun başında hareket etmesi, stratejisinin optimal olduğunu gösterir (Karabacak, 2018).

3. Sinyalleme Koşulu II: Tip uzayındaki her tip için gönderici faydasını maksimize edecek şekilde $m^*(t_i)$ mesajını (alıcının $a^*(m_j)$ stratejisi veri olduğunda) seçer. Dolayısıyla $m^*(t_i)$'nin çözümlediği değer;

$$\max_{m_j \in M} u_G\left(t_i, m_i, a^*(m_j)\right) \ olur.$$

Göndericinin $m^*(t_i)$ stratejisi verildiğinde, $m_j \in T_j$ olsun. Yani $m^*(t_i) = m_j$ ise t_i tipi T_j kümesinin bir elamanıdır. Eğer T_j boş küme olmazsa m_j mesajına karşılık gelen her bir denge durumu patika üzerindedir demektir, aksi durumda m_j hiçbir tip tarafından gönderilmezse bu durumda buna karşılık gelen bilgi kümesi de denge dışı bir patika olur.



Kaynak: Yılmaz (2016: 243).

Şekil 21. Sinyalli Oyununun Farklı Bir Gösterimi

Alıcının inançlarına 3. koşulu uygulanırsa:

4. ***Sinyalleme Koşulu:*** Her $m_i \in M$ gibi bir mesaj için $m^*(t_i) = m_j$ durumunu verecek bir $t_i \in T$ tipi olması halinde m_j mesajına gelen bilgi kümesinde alıcının inancı hem göndericinin mesajından hem de Bayes kuralından türetilmelidir:

$$\mu(t_i \backslash m_j) = \frac{p(t_i, m_j)}{p(m_j)} = \frac{p(t_i)p(m_j \backslash t_i)}{\sum_{t_i \in T} p(t_i)p(m_j \backslash t_i)}.$$

Bu formülde bulunan $p(m_j \backslash t_i)$, göndericinin tipi t_i olması durumunda mesajının m_j olma olasılığını ifade etmektedir.

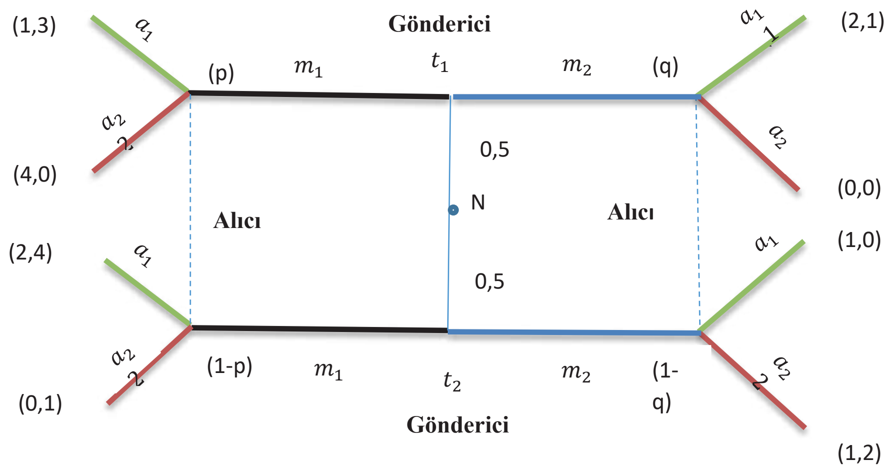
Bu oyunun daha da iyi anlaşılması için Şekil 20'ye bakılabilir. Bu şekilde tiplerine göre gönderilen mesajlar, mesajlara bağlı hareketlerin seçimi ve oluşturulan inançlar daha açık bir şekilde ifade edilmektedir. Bu şekilde $\mu(t_i \backslash m_j)$ ifadesi, alıcının m_j mesajını alması durumunda göndericinin tipinin t_i olma olasılığına ait inancını gösterir (Yılmaz, 2016).

Tanım: Bir sinyalli oyunda saf (pür) strateji mükemmel Bayesyen dengesi, $m^*(t_i), a^*(m_j)$ gibi bir strateji çiftinden ve 1., 2. (I ve II koşul) ve 3. sinyalleme koşullarını sağlayan bir inaçtan $\mu(t_i \backslash m_j)$ oluşur (Karabacak, 2018).

Örnek: Şekil 21'deki oyun, iki tipli bir göndericinin olduğu bir oyundur. Göndericinin her iki tipi eşit olasılıklarla doğa tarafından belirlenmektedir. Diğer taraftan (q, 1-q) ve (p,1-p) olasılıklarını kullanarak alıcının inançları gösterilmektedir.

Bu oyunda dört tane pür strateji Bayesyen mükemmel denge vardır;

1. m_1 üzerine birleştirici strateji
2. m_2 üzerine birleştirici strateji
3. t_1 tip m_1 stratejisini ve t_2 tip m_2 stratejisini oynaması ile ayrıştırıcı strateji
4. t_1 tip m_2 stratejisini ve t_2 tip m_1 stratejisini oynamasıyla ayrıştırıcı strateji (Gibbons, 1992).



Şekil 22. Sinyalli Oyun Örnek Gösterimi

Stratejilere ayrı ayrı bakmak gerekirse;

1. ***m_1* *üzerine birleştirici strateji:*** Göndericinin stratejisinin (m_1, m_1) olduğu bir denge durumu varsayılsın. Bu, her iki tipin de m_1 stratejisini seçtiği anlamına gelir. Bu durumda göndericinin m_1 hareketine karşılık gelen bilgi seti, aynı zamanda denge patikasıdır. Alıcının bu bilgi kümesindeki inanışı (p, 1-p), Bayes kuralı ve göndericinin stratejisi ile belirlenmiş olur. Doğanın tip seçimi (ön inanış) p=0,5 olasılığına bağlıdır. Bu bağlamda bu inanış veri alındığında, alıcının en iyi seçimi a_1 hareketidir ve bunun seçiminde t_1'in 1, t_2'nin ise 2 birimlik getirisi vardır. Bu durumda her iki tipe sahip olan göndericinin m_1 hareketini seçip seçmeme durumu, alıcının m_2 hareketine vereceği tepkiye bağlıdır. Eğer alıcının m_2'ye tepkisi a_1 hareketi ise t_1 tipine sahip olan göndericinin elde edeceği getiri 2 olur ve bu getiri t_1 tipiyle m_1'i oynamasıyla elde edeceği getiri 1'den daha büyük olur. Diğer yandan alıcının m_2'ye tepkisi eğer a_2 olursa bu durumda t_1 tipinin kazancı 0, t_2 tipinin kazancı da 1 olur. Halbuki göndericinin m_1 oynamasıyla elde edeceği kazançlar sırasıyla 1 ve 2 olur. Yani göndericinin stratejisi (m_1, m_1) olduğu bir denge söz konusu ise alıcının m_2'ye tepkisi a_2 olmak mecburiyetindedir. Sonuç olarak alıcının stratejisi (a_1, a_2) olur. Alıcının $q \leq 2/3$ için a_2 hareketini oynaması optimal olacağı için, $[(m_1, m_1), (a_1, a_2), p = 0.5,\ q]$ birleştirici mükemmel Bayesyen dengedir (Yılmaz, 2016).

2. ***m_2* *üzerine birleştirici strateji:*** Gönderici stratejisinin (m_2, m_2) olduğu bir denge durumu varsayılsın. Bu durumda sonraki inanç q=0.5 olacaktır. Bu bilgi setinde, alıcının $q \leq 2/3$ için a_2 hareketini oynaması optimal olarak bulunmuştu. Dolayısıyla alıcının, göndericinin m_2 mesajına karşılık en uygun hareketi a_2 oynamaktır. Bu hareket göndericinin t_1 tipi için kazancı 0, t_2 tipi için kazancı da 1 olur. Fakat p'nin herhangi bir değeri için alıcının m_1 mesajına karşılık en iyi tepkisi a_1 olacağı durumda, göndericinin de t_1 tipi için 1, t_2 tipi için ise 2 birimlik getirisi olabilir. Sonuç olarak gönderici için 2. sinyalleme koşulu sağlanmadığı için, (m_2, m_2) stratejisini oynaması bir denge sonucu vermez (Karabacak, 2018).

3. t_1 *tip ile* m_1 *ayrıştırıcı stratejisi:* Eğer gönderici, ayrıştırıcı $(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$ stratejisini oynarsa bu durumda bilgi seti alıcının denge patikası üzerinde olur. Böylece her iki inanç da Bayes kural ve göndericinin p=1, q= 0 şeklindeki stratejisi tarafından belirlenir. Bu durumda alıcının en iyi tepkisi (a_1, a_2) hareketleri olur ve gönderici her iki tipte de 1 birimlik kazanç elde eder. Sonuç olarak alıcının en iyi tepkisi (a_1, a_2) hareketleri veri alındığında, göndericinin stratejisinin optimal olup olmadığı kontrol edilir. Böylece göndericinin stratejisinin optimal olmadığı ortaya çıkar. Eğer gönderici t_2 tipi ile m_1 oynayıp sapma gösterirse alıcı a_2 yerine a_1 hareketini tepki verecektir ve bu durumda gönderici t_2 tipi ile 2 birim kazanacaktır. Böylece t_2 tipi ile elde edeceği 1 birimlik getiriden fazla olur (Gibbons, 1992).

4. t_1 *tip ile* m_2 *ayrıştırıcı stratejisi:* Eğer gönderici, ayrıştırıcı $(\mathrm{m}_2, \mathrm{m}_1)$ stratejisini oynarsa alıcının inaçları p= 0 ve q=1 olur. Dolayısıyla alıcının en iyi tepkisi (a_1, a_1) olur ve gönderici her iki tipi ile 2 birimlik kazanç elde eder. Eğer, gönderici t_1 tipi ile m_1 oynayarak sapma gösterirse alıcı a_1 hareketi ile tepki verecek ve gönderici bu durumda 1 birimlik daha az kazanç elde edecektir. Bu durumda m_2'den sapma gösterip m_1 oynamanın bir anlamı olmayacaktır. Diğer yandan bu duruma benzer olarak eğer gönderici t_2 tipi ile m_2 oynayarak sapma gösterirse alıcının en iyi tepkisi a_1 olacaktır. Böylece göndericinin kazancı 2 birimden 1 birime düşecektir. Bu durumda da m_1'den sapma gösterip m_2 oynamanın bir anlamı olmayacaktır. Sonuç olarak $[(m_2, m_1), (a_1, a_1), p = 0,\ q = 1]$ ayrıştırıcı mükemmel Bayesyen dengedir diyebiliriz (Yılmaz, 2016).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TEKRARLI VE SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

4.1. Tekrarlı Oyunlar

Luce ve Rafia (1957) ve Aumann (1960) ilk olarak yaptıkları çalışmalarda tekrarlı oyunlara değinmişlerdir. Bununla birlikte Friedman (1971) üretim oyunları için yapmış olduğu bir çalışmada, bireysel kâr maksimizasyonunun statik bir etkileşim altında rekabetçi sonuç ile uyumlu olduğunu bulmuştur. Aynı zamanda etkileşimin tekrarlandığı durumlarda da sürdürülebilir bir dengenin olduğunu göstermiştir (Gossner ve Tomala, 2007).

Tekrarlı oyunlar, dinamik oyunlar içinde önemli bir yere sahiptir (Yılmaz, 2016). Gerçek dünyada kurduğumuz birçok etkileşim süreğen bir yapıdadır. Bu durumda insanlar, kısa vadeli kazanımlarına ek olarak uzun vadeli kazanımlarını da göz önünde bulundururlar (Koçkesen ve Ok, 2007). İşte tekrarlı oyunlar, sürekli etkileşim halinde olan bir grup ajanın veya oyuncuların durumunu analiz eden bir simülasyon modelidir (Gossner ve Tomala, 2007). Bu oyunlar, oyuncuların birden fazla dönemde etkileşimde bulunduğu ve her dönemde alınan kararların gelecekteki davranışları etkilediği senaryoları kapsar (Bhattacharya, 2016). Tekrarlı oyun modelinde bir oyuncu, rakibinden gelen bir sinyal ile mevcut davranışlardan gelecekteki davranışlara bir yol bulur ve bununla işbirliği, intikam ve tehdit gibi amaçları açıklamaya çalışır (Osborne ve Rubinstein, 1994).

İnsanların uzun süreli etkileşimleri ile kısa süreli etkileşimlerinin anlaşılması için Mahkûmlar İkilemi örneği kullanılmıştır. Mahkûmlar İkilemi oyununda oyuncular, eğer birer kez oynarsa kusurlu bir sonuç ortaya çıkar; fakat tekrar tekrar oynarsa bir işbirliği olasılığı ortaya çıkabilir (Slantchev, 2004b).

Tablo 22'de gösterilen Mahkûmlar İkilemi oyununda, eğer oyuncular tek seferlik oynar ve işbirliği olmazsa tek bir tane Nash dengesi (D, D) elde edilir. Ayrıca bu denge, dominant baskın stratejidir (Koçkesen ve Ok, 2007). Diğer yandan Mahkûmlar İkilemi oyununun, tekrarlanan formatta oynandığı farz edilsin. Eğer oyuncular hem geçmiş eylemlerini gözlemleyebilirse hem de iyi bir kazanç elde etmek amacıyla koordineli çalışmaya ve işbirliğine yanaşırsa (C, C) stratejisi sürdürülebilir bir strateji olur (Gossner ve Tomala, 2007). Çünkü (C,C) stratejisi, (D,D) stratejisinden daha fazla kazanç sağlamaktadır (Koçkesen ve Ok, 2007).

Tablo 22. Mahkûmlar İkilemi Oyununun Tekrarlı Oyun İçin Kullanımı

		2. Oyuncu	
		Kabul **(C)**	Ret **(D)**
1. Oyuncu	Kabul **(C)**	2, 2	0, 3
	Ret **(D)**	3, 0	1, 1

Kaynak: Koçkesen ve Ok (2007: 107).

Tanım: n oyunculu $G = (N, (A_i), (g_i))$ gibi normal form oyunu olduğu farz edilsin. G'nin sonlu bir oyun olduğu varsayımı altında, sonlu oyuncu sayısı $N = \{1, \ldots., n\}$, sonlu eylemin hareket kümesi A_i ve karşılık gelen ödeme fonksiyonu; $g_i = A \rightarrow R$, burada $A = \Delta A_i$ olsun (Slantchev, 2004b). Burada g_i, i oyuncusunun her aşama oyununda ortaya çıkan fayda fonksiyonudur. Aynı zamanda bütün tekrarlı oyunlarda fayda düzeyini göstermek için u_i notasyonu da kullanılabilir (Yılmaz, 2016).

Tekrarlı oyunlar, ayrık zaman diliminde $t = 1,2, \ldots., T$ ve her periyodun sonunda oynanır. Ayrıca tüm oyuncular gerçekleşen hareketleri gözlemler (Slantchev, 2004b).

Eğer bu oyunun son periyodu T varsa toplamda T+1 periyot vardır ve bu tür oyunlara ise sınırlı tekrarlı oyunlar $(T < \infty)$ denir. Eğer oyun sınırsız tekrarlanırsa $(T = \infty)$ bu tür oyunlara da sınırsız tekrarlı oyunlar denir.

G aşama oyunun t periyodunda i oyuncusunun yaptığı hareket a_i^t ile ifade edilir ve t periyodunda oynanan hareket profili ise n oyunculu aşama-oyun hareketlerinden oluşmaktadır; $a^t = (a_1^t, \dots\dots, a_n^t)$ bu şekilde ifade edilir. Oyuncunun sonraki periyotlarda yapacağı hareket tercihi, oyuncuların önceki tarihlerde alınmış kararlarına dayandırılması gerekmektedir. Bunun da yapılabilmesi için tarih kavramının dahil edilmesi gerekmektedir. Bu durumda kısaca tarih, bir önceki periyoda kadar alınan tüm hareketler olarak tanımlanabilir. Böylece, t periyodundaki tarih (Koçkesen ve Ok, 2007);

$t = 1.2, \dots..$ için $h^t = (a^0, a^1, \dots\dots\dots a^{t-1})$ şeklinde ifade edilir.

Örneğin Tablo 22'deki Mahkûmlar İkilemi örneğinde olası 1. periyot geçmişi;

$h^4 = ((C,C),(C,D),(D,C),(D,D))$ olur.

Tablo 22'de gösterilen oyundaki periyotlar, t=0'dan başladığından dolayı h^4 ile gösterilen dört periyot; 0, 1, 2, 3 şeklinde tanımlanır. $H^t = (A)^t$, t periyotlu tarihlerin muhtemel yeri olsun. Olası 1. periyotlu tarihlerin kümesi; $H^1 = ((C,C),(C,D),(D,C),(D,D))$ olur ve bu da olası 0. periyodunun sonuçlarıdır. 2. periyodun olası tarihler kümesi;

$$H^2 = (A)^2 = AxA$$

$$= \{((C,C),(C,D),(D,C),(D,D))\}x\{((C,C),(C,D),(D,C),(D,D))\} \text{ olur.}$$

Sınırlı tekrarlı oyunların terminal tarihi, oyunların tekrarlandığı dönemin T sayısıdır. Burada sınırlı tekrarlanan oyunun periyodu $(T < \infty)$'dir. Diğer taraftan sınırsız tekrarlı oyunlarda ise terminal tarihi, sonsuz uzunluktaki bir tarihtir. Herhangi bir terminal olmayan tarih, tekrarlanan oyunda bir alt oyundur (Slantchev, 2004b).

Terminal noktası olmayan herhangi bir tarihten sonra, tüm oyuncular $(i \in N)$ aynı anda bir hareket $(a_i \in A_i)$ seçer. Çünkü tüm oyuncular h^t'yi gözlemlediğinden dolayı, i oyuncusu için saf strateji $s_i(h^t): H^t \to A_i$ şeklinde fonksiyon dizisidir. Bu da $a_i \in A_i$ hareket kümesinde muhtemel t tarihli periyodu $h^t \in H^t$ verir. Başka bir deyişle $s_i(h^t)$, h^t tarihinden sonra i oyuncusu için a_i hareketini verir. Yani, i oyuncusu için strateji profili (Koçkesen ve Ok, 2007);

$$s_i = \left(s_i(h^0), s_i(h^1), \dots\dots\dots, s_i(h^T)\right)$$

Mahkûmlar İkilemi oyununda $T = \infty$ olması durumunda strateji;

$$s_i(h^0) = C$$

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C \text{ eğer } a_j^T \neq i, \text{için } t = 0,1,2,t-1 \\ \quad D, \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}.$$

Bu strateji bize şunu ifade eder; ilk periyotta işbirliği ile başla, sonra eğer rakip oyuncu önceki tüm periyotlarda işbirliği yaptığı sürece işbirliği yap, aksi durumda misilleme (bu stratejinin bir diğer adı tetik stratejidir) yap.

i oyuncusu için strateji kümesi S_i ve tüm stratejileri $S = \Delta S_i$ olarak ifade edilir. İ oyuncusu için karma strateji σ_i, $\sigma_i(h^t): H^t \rightarrow A_i$'nin bir fonksiyonudur. Bu olası karma strateji t tarihli periyot için $\propto_i \in A_i$ ile eşleşir. Bir oyuncunun stratejisi, sadece rakibinin rastgele olasılıklarla geçmiş değerlerine bağlı değildir; aynı zamanda geçmiş a_{-i} değerine de bağlıdır. Tüm oyuncuların eş zamanlı olarak hareketlerini seçtikleri için, her periyot yeni bir alt oyun olarak başlar. Bu bilgi, mükemmel alt oyun analizinde önem arz etmektedir (Slantchev, 2004b).

Sınırlı oyunlar, tek terminal tarihine sahip olduğu için her bir periyodun faydası o aşamanın faydasıdır. Bu durumda her bir oyuncunun fayda akışı; $(g_i(a^0), g_i(a^1), g_i(a^2), \dots\dots..)$ şeklinde tanımlanır. Sınırsız oyunlarda ise oyuncuların gelecekteki (tekrarlayan oyunun devam edecek aşamalarında) indirgemiş fayda düzeylerinin hesaplanması için ise iskonto oranı $\delta \in (0,1)$ kullanılır. i oyuncusunun sonsuz terkrarlanan periyotlar için kazancının ya da faydasının, iskonto oranını kullanarak her periyot için indirgenmiş hali;

$u_i = g_i(a^0) + \delta g_i(a^1) + \delta^2(a^2) + \cdots \dots \dots \dots + \delta^t(a^t)$ şeklinde tanımlanır.

Tablo 22'deki Mahkûmlar İkilemi oyununda oyuncular tarafından sürekli olarak C hamlesi oynanırsa her bir oyuncunun indirgemiş toplam fayda düzeyi aşağıdaki gibi olur:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c = \frac{c}{1-\delta}.$$

Eğer oyuncuların tercihleri, her bir periyodun indirgemiş toplam faydası ile temsil edilirse o zaman her bir periyot, indirgemiş ortalama fayda düzeyi ile temsil edilir. Bu da $u_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(a^t)$ şeklinde tanımlanır (Yılmaz, 2016).

Normalleşme faktörü $(1-\delta)$, tekrarlanan oyun ve periyot fayda düzeyi ölçümünde yardımcı olur. Sabit kazancın olduğu durumda, normalize edilmiş en yüksek fayda düzeyi C stratejisi ile elde edilir ve bu tek bir periyotla da doğrudan karşılaştırılabilirler. İ oyuncusunun $G(\delta)$ gibi bir oyunda, normalize edilmiş toplam faydasını maksimize edecek formül:

$$u_i = E\sigma(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t g_i\big(\sigma(h^t)\big).$$

$E\sigma$, σ strateji profilinin sınırlı tarihlere üzerine ait beklentisini ifade eder. Örneğin $g_i = (C, C) = 2$ gibi burumda, sürekli işbirliği sonucunda elde edilecek kazanç aşağıdaki gib olur (Koçkesen ve Ok, 2007):

$$u_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t(2) = (1-\delta)\frac{2}{(1-\delta)} = 2.$$

Bu şekilde normal oyun (G) ile indirgenmiş oyun (G(δ)) arasındaki kazançlar karşılaştırılabilir. Yukarıda kullanılan notasyonları yeniden tekrarlanırsa u_i, s_i ve σ_i indirgenmiş oyunda, i oyuncusunun saf ve karma strateji kazançlarını ifade eder. Diğer yandan g_i, a_i ve $\propto_i$ ise genel oyunda i oyuncusunun saf ve karma strateji kazançlarını ifade eder. Sonuç olarak her bir tarih yeni bir alt oyunla başlar. Yani herhangi bir strateji profili σ ve tarih h^t için oyuncuların beklenen kazançları t periyodundan itibaren hesaplanır. Aynı zamanda buna devam eden kazançlar da denir ve t zamanın kazancı t zaman cinsinden hesaplanır (Slantchev, 2004b):

$$u_i\left({}^{\sigma}/_{h^t}\right) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^{T-t}\, g_i(\sigma(h^t).$$

4.1.1. Sınırlı Tekrarlı Oyunlar

Sınır tekrarlı oyunlar, belirli bir sayıda (sonlu) tekrar edilen aşama oyunlarını içerir. Her bir aşama oyunu, klasik oyun teorisinde olduğu gibi oyuncuların belirli stratejilerle katıldığı ve anında sonuçlar aldığı oyunlardır. Ancak, bu oyunlar tekrarlandığında, oyuncuların önceki oyunlarda edindikleri bilgi ve tecrübeler gelecekteki oyunlarda alacakları kararları etkiler.

Bu oyunlar, $T < \infty$ gibi sabit zaman durumunu temsil eder. Tekrarlı oyunlar, oyunculara önceki periyotlarda rakiplerinin nasıl davrandığı konusunda koşullanmasını sağlar. Tekrarlı oyunlar, Mahkûmlar İkilemi oyunu üzerinden değerlendirilebilir (Slantchev, 2004b). Tekrarlı Mahkûmlar İkilemi oyunlarında, oyuncuların her turda işbirliği yapıp yapmama kararı, gelecekteki turlarda da işbirliği yapıp yapmama kararını etkiler. Bu oyun, oyuncuların stratejik karar alma süreçlerini ve işbirliği yapma eğilimlerini anlamak için yaygın olarak kullanılır (Axelrod, 1984).

Tablo 23. Mahkûmlar İkilemi Oyununun Tekrarlı Oyun İçin Kullanımı (Tekrar)

		2. Oyuncu Kabul **(C)**	**2. Oyuncu** Ret **(D)**
1. Oyuncu	Kabul **(C)**	2, 2	0, <u>3</u>
	Ret **(D)**	<u>3</u>, 0	<u>1, 1</u>

Kaynak: Koçkesen ve Ok (2007: 107).

T periyot oynanan $G(\delta, T)$ gibi bir oyunda, $\delta \in (0,1)$ gibi bir iskonto oranı olsun. Farklı zaman periyotlarında kazançların nasıl değiştiğinin ifade edilmesi için her bir periyot kazancı normalize edilir. Bu durumda, ortalama indirgenmiş fayda veya kazanç düzeyi aşağıdaki gibi olur (Ratliff, 1996):

$$u_i = \frac{1-\delta}{1-\delta^{T+1}} \sum_{t=0}^{T} \delta^t g_i(a^t).$$

Bu durum, tüm T periyodu boyunca her iki oyuncunun işbirliği yaptığını gösterir. Normalizasyonda ortalama iskonto toplamı sadece 2 iken normalize edilmeden toplam iskonto aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t (2) = \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}.$$

Alt oyun mükemmel dengesi, sonlu tekrarlı oyunlarda her alt oyunda Nash dengesine ulaşmak için kullanılan stratejilerdir (Osborne ve Rubinstein, 1994). Sınırlı tekrarlı oyunlarda, alt oyun mükemmel dengenin bulunması için (oyun sınırlı olduğu için) geriye doğru çıkarım yöntemi kullanılır. Tablo 23'deki Mahkûmlar İkilemi oyununun T periyodunda tek bir Nash dengesi (D,D) vardır ve bu denge, her iki oyuncu için de optimum değildir. Diğer yandan her iki oyuncu için T periyodunda denge kusurlu olduğu için T-1 periyodunda optimal olan denge de kusurludur. Böylece bu oyun geriye doğru çözülür ve tek alt oyun mükemmel denge her bir oyuncunun kusurlu olduğu stratejidir. Bu oyunda her periyodun sonucu (D,D) olur ve bu durumda sınırlı tekrarlanan Mahkûmlar İkilemi oyununun kazanç profili (1,1) olur. Çünkü oyuncuların işbirliği stratejisine bağlı kalmaları rasyonel değildir. Bu tek Nash dengesinin olduğu her sınırlı tekrarlı oyun için geçerlidir. Her oyuncunun sapma stratejisi izlediği bir tek alt oyun Nash dengesi vardır (Yılmaz, 2016).

Mahkûmlar İkilemi oyununun alt oyun mükemmel Nash dengesinin her zaman kusurlu bir sonuç olması muhtemeldir. Her iki oyuncu, σ^* (bu oyundaki Nash dengesini temsil eder) altında pozitif bir olasılığa sahip h^T tarihinde geçmiş bir periyot için yine kusurlu sonuca sahip olacaktır. Çünkü bunu yapmak T periyodundaki kazançları artırır ve çünkü gelecekte cezalandıracağı bir periyot yoktur.

Oyuncular denge patikası boyunca son periyotta optimum bir sonuca sahip olmayacağından, eğer i oyuncusu T-1 periyodunda denge stratejisine uygun davranırsa rakibi T periyodunda kusurlu olur ve bu yüzden i oyuncusu, rakibinin T-1 periyodunda kusurlu olmaması için teşvik etmez (Slantchev, 2004b; Ratliff, 1996).

4.1.2. Sınırsız Tekrarlı Oyunlar

Sınırsız tekrarlı oyunlar, belirli bir stratejik oyunun sonsuz sayıda tekrarlandığı oyun teorisi modelleridir. Bu oyunlarda, oyuncular her turda geçmiş oyunların sonuçlarını göz önünde bulundurarak stratejilerini belirlerler. Böylece, gelecekteki olası kazançlar ve cezalar, oyuncuların şu anki davranışlarını etkiler. Sınırsız tekrarlı oyunlar, özellikle işbirliği, anlaşma ve rekabet analizlerinde kullanılır. Özellikle sınırsız tekrarlı oyunlar, bir çok alanda kullanılabilmektedir. Örneğin, şirketler arasındaki rekabet ve işbirliği, fiyat belirleme stratejileri ve antitröst davaları gibi ekonomik etkileşimler, ülkeler arasındaki ticaret anlaşmaları ve diplomatik ilişkiler, uzun vadeli işbirliği ve güven oluşturma stratejileri, toplum içinde bireyler arasındaki işbirliği sınırsız tekrarlı oyunlar ile modellenebilir (Aumann, 1981; Rasmusen, 1992; Gossner ve Tomala, 2007).

Sınırsız tekrarlı oyunlar, sonsuz zaman $T = \infty$ ufkunun olduğu ve ne zaman biteceği belli olmayan bir oyun türüdür. Bu tür oyunlarda oyuncuların denge kümesi, sınırlı tekrarlı oyunlardan farklıdır. Çünkü bu tür oyunlarda sınırlı bir zaman ufku olmadığı için oyuncular, terminal noktalarından itibaren çözülemeyen kendini zorlayan ödüller ve cezalar kullanabilirler. Örneğin, Mahkûmlar İkilemi oyununda eğer oyun sürekli oynanırsa cezalandırma stratejisi, oyuncular için işbirliğini sağlayacak ve devam ettirecek bir tehdit olarak kullanmasına imkan verir (Slantchev, 2004b).

Sınırlı tekrarlı oyunlarda oyuncuların stratejileri herhangi bir T periyodunda ne yapılacağı tanımlanırken sınırsız tekrarlı oyunlarda bu durum çok zordur. Çünkü, bu durumda tüm olası tarihlerin hareketlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Ancak bu hareketler sonsuz defa tekrarlanmaktadır. Bunlardan bazılarına değinmek gerekirse:

- ***Her Zaman Savunma Gösterme Stratejisi:*** Bu strateji, oyuncuya her tarihten sonra rakibinin ne yaptığından bağımsız olarak savunma hareketini benimsemesini tavsiye eder. Bu durumda tüm $t = 0, 1, \ldots.$ için $s_i(h^t) = D$ olur. Böylece her iki oyuncunun her periyotta savunmaya geçmesi veya sapma göstermesi Nash dengesi (D,D) olur. Çünkü her periyotta D hareketine karşı en iyi savunma yine D hareketi olur (Yılmaz, 2016).
- ***Her Zaman İşbirliğinde Bulunma Stratejisi:*** Bu strateji, oyuncuya her tarihten sonra rakibinin ne yaptığından bağımsız olarak işbirliği hareketini benimsemesini tavsiye eder. Bu durumda tüm $t = 0, 1, \ldots.$ için $s_i(h^t) = C$ olur. Ancak iki oyuncunun işbirliğinde (C,C) olduğu strateji, Nash dengesi değildir. Çünkü rakibin işbirliğinde kalması durumunda sapma göstermesi veya savunmaya geçmesi daha rasyoneldir (Slantchev, 2004b).
- ***Naif Yavuz Stratejisi:*** Bu strateji, rakip işbirliğine yanaştığında işbirliği, rakip bir defa sapma gösterdiğinde hep sapma gösterme hareketini benimsemeyi tavsiye eder.

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C, \ \ eğer \ \ t = 0 \\ C, eğer \ a_j^\tau = C, j \neq i, \tau = 0, 1, \ldots t - 1 \\ D, aksi \ takdirde \end{cases}$$

Bu stratejide affetme yoktur. Karşı rakip tek bir sapma gösterdiğinde sonsuza kadar cezalandır stratejisidir.

- ***Yavuz Stratejisi:*** Bu strateji ise ilk periyotta işbirliğini ve sonraki periyotlarda da rakipleri işbirliğine bulunduğu müddetçe işbirliğinde bulunmayı tavsiye eder.

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C, eğer \ t = 0 \\ C, eğer \ a_j^\tau = (C, C), j \neq i, \tau = 0, 1, \ldots t - 1 \\ D, aksi \ takdirde \end{cases}$$

Bu strateji, naif yavuz stratejisinin aksine; rakibinin sapmalarından dolayı değil, kendi sapmalarından dolayı cezalandırmayı tavsiye eder (Yılmaz, 2016; Koçkesen ve Ok, 2007).

Tablo 23'te verilen Mahkûmlar İkilemi oyunu üzerinden bu stratejilere göz gezdirelim. 1. oyuncunun yavuz stratejiyi benimsediğini ve 2.

oyuncunun da böyle oynadığını varsayalım. Böylece denge (C,C) olur ve her iki oyuncunun kazancı (2,2) olur. Bu durumda oyun sonunda indirgenmiş kazanç veya faydası aşağıdaki gibi olur (Koçkesen ve Ok, 2007):

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t 2 = \frac{2}{1-\delta} \qquad (a)$$

Eğer 2. oyuncu herhangi bir periyotta D hareketini oynarsa 1. oyuncu takip eden tüm periyotlarda rakibini cezalandırmak için (yavuz stratejiye göre sert cezalandırmak için D hareketi tavsiye edilir) D hareketini oynar. 2. oyuncunun da takip eden her periyotta en iyi hareketi D oynamaktır. Eğer, 1. oyuncu ilk periyotta faydasını artırmak amacıyla saparak D hareketini oynarsa oyun ((D,C), (D,D), (D,D),.....) şeklinde olur ve kazancı ise (3, 1, 1, ...) gibi bir fayda akımına sahip olur. Bu durumda 1. oyuncunun indirgenmiş fayda düzeyi aşağıdaki gibi olur:

$$3 + 1\delta + 1\delta^2 + \cdots = 3 + \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = 3 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{3(1-\delta)+\delta}{1-\delta} \qquad (b)$$

Sonuç olarak 1. oyuncu için 1. koşulun faydası 2. koşulun faydasından fazla ise (yani işbirliğinin faydası sapmanın faydasında fazla ise) işbirliğine yanaşacaktır. Bu durumda $2 \geq 3(1-\delta) + \delta \rightarrow\rightarrow\rightarrow \delta \geq {}^{1}\!/_{2}$ ise yavuz strateji Nash dengesi olur (Schwalbe, 2001).

Eğer 1. oyuncu ilk periyotta değil de sonraki herhangi bir periyotta sapma gösterirse bu periyotta $\tau \in \{0, 1, 2\}$ nasıl bir sonuç çıktığına bakılmalıdır. Bu durumda 2. oyuncu yavuz stratejiyi izlediği için $\tau + 1$ periyodundan itibaren D hareketini oynar. Böylece 1. oyuncunun en iyi tepkisi bundan sonra sapma göstererek D hareketini oynamaktır. Bu durumda oyuncuların hareketleri; (C, C), (C, C),....., (C, C), (D, C), (D, D), (D, D), (D, D),.......... şeklinde ve 1. oyuncunun fayda akımı ise 2, 2,....,2, 3, 1, 1,...... gibi olur. 1. oyuncunun indirgenmiş fayda düzeyi de aşağıdaki gibidir (Koçkesen ve Ok, 2007);

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + .. + 2\delta^{\tau-1} + 3\delta^{\tau} + 3\delta^{\tau+1} + . = \sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t.2 + 3\delta^{\tau} + \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \delta^t.1$$

$$= 2.\frac{1-\delta^{\tau}}{1-\delta} + 3\delta^{\tau} + 1.\frac{\delta^{\tau+1}}{1-\delta} = \frac{2+\delta^{\tau}-2\delta^{\tau+1}}{1-\delta} \qquad (c)$$

Diğer yandan işbirliğini devam ettirecek iskonto oranını bulmak için a ve c'de ifade edilen faydalar karşılaştırılır:

$$2 \geq 2 + \delta^{\tau} - 2\delta^{\tau+1}$$

Bu durumda iskonto oranın $\delta \geq {}^{1}/_{2}$ değeri için sapma gösterme veya savunmaya geçme kârlı değildir. Yani, eğer oyuncular yeterince sabırlıysa (yani eğer $\delta \geq {}^{1}/_{2}$ ise) oyuncular için (yavuz,yavuz) strateji profili Nash dengesidir. Bu durum da tüm periyotlarda işbirliği yapmak anlamına gelir.

➢ ***Sınırlı Cezalandırma:*** Bu stratejiye, bağışlayıcı strateji de denir. Bu strateji, ilk periyotta işbirliğini ve rakibin sapması durumunda k periyoduna kadar sapmayı (cezalandırmayı) ve daha sonra işbirliğinde bulunmayı tavsiye eder. Eğer bu durumda $k = \infty$ olursa yavuz strateji, eğer $k = 5$ olursa sınırlı cezalandırma söz konusu olur. Daha sade bir şekilde ifade etemek gerekirse:

✓ 1. aşama: İlk aşamada işbirliği yap ve 2. aşamaya geç.

✓ 2. aşama: Eğer rakip tarafından bir önceki periyotta sapma olmadıysa işbirliğine devam et, eğer sapma varsa 3. aşamaya geç ve periyodunu $\tau = 0$ olarak belirle.

✓ 3. aşama: Eğer $\tau \leq k$ olursa sapma göster, aksi durumda 1. aşamaya dön (Yılmaz, 2016).

Bu durumda dengenin nasıl oluştuğunu bulmak için aynı örneğe devam edilecek olursa D hareketini seçen oyuncunun k periyodu kadar sınırlı bir cezalandırmaya maruz kaldığı bir durum söz konusu olur. Eğer oyunculardan biri bu strateji benimserse diğer oyuncu da bu stratejiyi benimser mi?

1. oyuncunun sınırlı cezalandırma stratejisini benimsediğini ve yavuz stratejide olduğu gibi 2. oyuncu faydasını artırmak maksadıyla ilk periyottan saparak D stratejisini seçtiğini varsayıyoruz. Bu durumda 1. oyuncu, rakibinden bağımsız k periyodu boyunca D hareketini seçer. 2. oyuncu da her periyotta D hareketini oynar. Daha sonra 1. oyuncu k+1 periyodunda yine ilk periyotta olduğu gibi C hareketini seçer ve 2. oyuncuda ilk periyottaki aynı durumla karşı karşıya olur. Eğer 2. oyuncu stratejiye bağlı kalır ve C hareketini oynarsa indirgenmiş faydası aşağıdaki gibi olur (Koçkesen ve Ok, 2007):

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots 2\delta^k = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t 2 = \frac{2(1 - \delta^{k+1})}{1 - \delta} \qquad (d)$$

Diğer yandan 2. oyuncu saparsa bu periyotta indirgenmiş faydası da aşağıdaki gibi olur:

$$3 + 1\delta + 1\delta^2 + \cdots \delta^k = 3 + \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{3(1 - \delta) + \delta(1 - \delta^k)}{1 - \delta} \qquad (e)$$

2. oyuncu için d ve e'de ifade edilen fayda düzeyleri karşılaştırlırsa:

$2(1-\delta^{k+1}) \geq 3(1-\delta)+\delta(1-\delta^{k})$ şeklinde ifade edilir.

Böylece, $\delta^{k+1}-2\delta+1 \leq 0$ durumunda 2. oyuncunun sapma göstermesi rasyonel olmayacaktır. Cezalandırma stratejisinin etkili olması için $k>1$ olmalıdır. Örneğin $k=2$ olduğunda eşitsizlik $\delta \geq 0{,}62$ için sağlanır iken $k=3$ olduğunda ise eşitsizlik $\delta = 0{,}55$ için sağlanır. Bu durumdan anlaşılacağı üzere; k arttıkça, δ üzerindeki alt sınır azalmakta ve 0,5'e yaklaşmaktadır. Böylece yavuz strateji durumuna yaklaşmış olur.

Sonuç olarak bu stratejiyi özetlenecek olursa her oyuncunun rakibini k periyodu kadar cezalandırdığı bir strateji ve iskonto oranının yüksek ve $k \geq 2$ kadar periyodun olduğu sınırsız tekrarlı bir oyunun bir Nash dengesi vardır. Kısacası, eğer oyuncular sabırlı olursa kısa dönem cezalandırmalar (C, C) dengesini sağlar (Yılmaz, 2016).

➢ ***Kısasa Kısas Stratejisi:*** Bu strateji ilk periyotta işbirliğini ve sonraki periyotlarda rakibinin bir önce periyotta yaptığı aynı stratejiyi benimsemeyi tavsiye eder. Özetle, eğer rakibin saparsa sap, eğer işbirliğinde bulunursa işbirliğinde bulun stratejisidir. Bu strateji, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$s_i(h^t)=\begin{cases} C, eğer\ \ t=0 \\ C, eğer\ \ a_j^{t-1}=C, j\neq i\ . \\ D, aksi\ takdirde \end{cases}$$

Bu strateji, rakip sapma gösterdiğinde sapma ve işbirliğine döndüğünde işbirliğini tavsiye eden bir strateji olduğu için en bağışlayıcı stratejidir. Bu stratejinin alt oyun mükemmel dengesini bulmak için, muhtemel dört alt oyun (C, C), (C, D), (D,C) ve (D, D) dengelerinin düşünülmesi gerekmektedir (Slantchev, 2004b; Gossner ve Tomala, 2007).

İlk olarak (D, C)'nin alt oyun olduğu ve 2. oyuncunun kısasa kısas stratejisine sadık kaldığı varsayılsın. Bu durumda eğer 1. oyuncu da aynı stratejiyi benimserse sonuç (D, C) ve (C, D) ve (3, 0, 3,0…) fayda akımı arasında gidip gelir. Bu bağlamda 1. oyuncunun bu alt oyunda indirgenmiş faydası aşağıdaki gibi olur:

$$3+3\delta^2+3\delta^4+\cdots\ldots\ldots\ldots=\frac{3}{(1-\delta)(1+\delta)} \qquad (f)$$

Eğer 1. oyuncu ilk periyotta kısasa kısas stratejisine bağlı kalmak şartıyla D hareketi yerine C hareketini oynasaydı, böylece alt oyunun her periyodunda (C, C) olurdu. Bu bağlamda 1. oyuncunun indirgenmiş faydası aşağıdaki gibi olurdu:

$$2 + 2\delta + \cdots \dots \dots = \frac{2}{(1-\delta)} \qquad (g)$$

Bu alt oyunda kısasa kısas stratejisinin optimal olması için f ve g fayda düzeyleri karşılaştırılır:

$$\frac{3}{(1+\delta)} \geq 2\ veya\ \delta \leq \frac{1}{2}$$

2.'si (C,D)'nin alt oyun olduğu ve her iki oyuncunun da kısasa kısas stratejisine sadık kaldığı varsayılsın. Böylece sonuç (C,D) ve (D,C) arasında gidip gelecektir ve 1. oyuncunun indirgenmiş faydası da aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{3}{(1-\delta)(1+\delta)}$$

Eğer 1. oyuncu alt oyunun 1. periyodunda D hareketine sapar ve kısasa kısas stratejisini benimserse bu durumda her periyotta sonuç (D, D) olur. Bu da 1. oyuncuya $^{1}/_{(1-\delta)}$ indirgenmiş fayda düzeyini sağlar. Böylece kısasa kısas stratejisinin 1. oyuncu açısından optimal olması için gereken koşul aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{3}{(1+\delta)} \geq 1\ veya\ \delta \geq \frac{1}{2}\ .$$

Sonuç olarak her iki oyuncunun kısasa kısas stratejisini benimsediği sınırsız tekrarlanan Mahkûmlar İkilemi oyununda ancak $\delta = {}^{1}/_{2}$ olursa alt oyun mükemmel dengedir denilebilir (Yılmaz, 2016; Koçkesen ve Ok, 2007; Gossner ve Tomala, 2007).

4.2. Sıfır Toplamlı Oyunlar

Sıfır toplamlı oyunlar, işbirliğinin olmadığı rekabetçi oyun türlerindendir. Ancak rekabetçi oyunlar sıfır toplamlı olmamasına karşın sıfır toplamlı oyunlar rekabetçi oyunlardandır (Karabacak, 2018). Bu oyunlarda, tüm oyuncuların kârları rakiplerinin kayıplarına eşittir. Başka bir deyişle bir oyunda seçilen tüm stratejilerden elde edilen kazançlar ile kayıpların toplamı sıfıra eşittir. Bu durum için en iyi örneklerden biri poker oyunudur. Örneğin poker oyunun galibi, o oyuna katılan tüm oyuncuların zararına eşit bir miktarda kazanç elde eder (Hogarth, 2019). Sıfır toplamlı oyunlarda tüm oyuncuların çıkarları birbirine tamamen zıt olduğu için, işbirliği ve iletişim ihtimali bulunmamaktadır. Bu durum için satranç, tenis ve briç gibi oyunları örnek verebiliriz (Karabacak, 2018).

Başka bir deyişle sıfır toplamlı oyun, oyuncuların her strateji sonucundaki fayda düzeylerinin toplamını sıfıra eşitleyen bir özelliğe sahiptir. Bu tür oyunlarda oyunculardan birinin elde ettiği kazanç diğerinin cebinden çıkar. Bu sebeple oyuncuların çıkarları birbirine zıttır, yani çıkarları çatışır ve oyuncular arasında bir işbirliğinin olması imkansızdır (Winston, 2004).

İki kişili sıfır toplamlı oyunlar, oyun teorisinin gelişmesinde çok büyük bir öneme sahiptir (Arsham, 1995). Oyun teorisinin ortaya çıkmasında en önemli adımları atan John Neumann, 1928 yılında yayınlamış olduğu iki kişili sıfır toplamlı oyunlar adlı makalesi ile sıfır toplamlı oyunların temelini atmıştır. Diğer yandan John Neumann bu çalışmasını, Oskar Morgenstern ile birlikte 1944 yılında kaleme aldıkları "Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı eser ile daha da taçlandırmıştır. Sonraki dönemlerde Guillermo Oven (1982) ve Philip D. Straffin (1993) gibi ekonomistler, bu alan üzerinde çalışmalar yapmışlardır (Ferguson, 2000).

Sıfır toplamlı oyunlar, sabit toplamlı oyunların özel bir alanını temsil eder. Sabit toplamlı bir oyunda oyuncuların belli strateji profilleriyle elde ettikleri kazançlar sabit bir sayıya eşit olur iken sıfır toplamlı oyunlarda ise kazançların toplamı sıfıra eşittir. Diğer yandan iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için geliştirilen çözüm metotları, aynı zamanda iki kişili sabit toplamlı oyunlar için de geçerlidir.

4.2.1. Maxmin Değeri

Bir oyunda eğer rakip oyuncu işbirliğine girmeyip sapma hareketinde bulunmayı tercih ederse mümkün olan en ağır cezalandırmayla karşı karşıya kalır. Bu bağlamda işbirliğine girmeyen oyuncu için en iyi strateji kendisini cezalardan korumaktır. Bu durumu en iyi açıklayan strateji, maxmin stratejidir (Çevikkan, 2010).

Tanım: İki kişili sıfır toplamlı bir oyunda maxmin değeri aşağıdaki gibi tanımlanır (Karabacak, 2018; Ventsell, 1965):

2. oyuncunun maxmin stratejisini seçmesi durumunda, 1. oyuncunun kazancı:

$\max\min u(s_1, s_2) = \theta \to s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ şeklinde tanımlanır.

1. oyuncunun maxmin stratejisini seçmesi durumunda, 2. oyuncunun kazancı:

$\max\min u(s_1, s_2) = -\theta \to s_2 \in S_2, s_1 \in S_1$ şeklinde tanımlanır.

Bu durum genellenirse $\max_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} min\ u(s_1, s_2) = \max\ \ min_{s_2 \in S_2, s_1 \in S_1}(-u(s_1, s_2))$ şeklinde tanımlanır.

Maxmin değeri, bir oyunda rasyonel oyuncunun karşı rakibin kazancına karşı güvence altına altığı minimum kazancı ifade eder. Sıfır toplamlı oyunda bir oyuncu maxmin değerini bulmak için, kendi muhtemel stratejilerini veri alarak rakibinin stratejisi seçimine bağlı kalarak minimum kazançlarını tespit eder ve bu stratejiler arasından kendisine maksimum kazancı sağlayacak stratejiyi seçer. Bu bağlamda oyuncular, en kötü sonuçların içinden en iyi kazanç düzeyini sağlayacak stratejiyi seçerek minimum kazanç düzeylerini güvence altına almış olurlar (Karabacak, 2018). Başka bir deyişle Maxmin strateji, ödemeler matrisinde minimum değerli stratejiler içerisinde maksimum kazancı sağlayan stratejiyi seçmektir (Özkan, 2005).

Tablo 24. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Maxmin Değerinin Gösterimi

2. Oyuncu

1. Oyuncu

	X	*Y*	*Z*	*Min_{s2}*
X	3, -3	-5, 5	-2, 2	-5
Y	1, -1	4, -4	1, -1	1
Z	6, -6	-3, 3	-5, 5	-5
Min_{s1}	-6	-4	-1	(1, -1)

Kaynak: Karabacak (2018: 195).

Tablo 24'te verilen örnekte maxmin değerler verilmiştir. Ödemeler matrisinde her iki oyuncunun da maxmin stratejiyi seçtiklerini varsayılsın. Min_{s2}'de, 2. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucu, 1. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançları gösterirken Min_{s1}'de ise 1. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucu 2. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançları göstermektedir.

İlk analiz 1. oyuncu için yapılır. 2. oyuncu X, Y ve Z saf stratejilerden herhangi birini seçmesi durumunda, 1. oyuncun da kendi saf stratejilerinden kazanacağı minimum fayda düzeyi sırasıyla X(-5), Y(1) ve Z(-5) olur. Bu bağlamda 1. oyuncu, 2. oyuncunun kendi fayda düzeyini düşürebilecek stratejiyi seçmesi riskine karşılık minimum kazançlarını tespit eder ve bunlar içerisinde kendisine maksimum fayda düzeyini sağlayacak stratejiyi seçer. Böylece 1. oyuncunun maxmin stratejisi Y(1) olur(Karabacak, 2018; Ferguson, 2019).

2. analiz, 2. oyuncu için yapılır. 1. oyuncu X, Y ve Z saf stratejilerden herhangi birini seçmesi durumunda, 2. oyuncunun da kendi saf stratejilerinden kazanacağı minimum fayda düzeyi sırasıyla X(-6), Y(-4) ve Z(-1) olur. Bu bağlamda 1. oyuncu, 2. oyuncunun kendi fayda düzeyini düşürebilecek stratejiyi seçmesi riskine karşılık minimum kazançlarını tespit eder ve bunlar içerisinde kendisine maksimum fayda düzeyini sağlayacak stratejiyi seçer. Böylece 1. oyuncunun maxmin stratejisi Z(-1) olur.

Sonuç olarak her iki oyuncunun da maxmin stratejiyi seçmesi durumunda strateji profili (Y, Z) ve kazançları ise (1,-1) olur (Karabacak, 2018; Ferguson, 2019).

4.2.2. Minmax Değeri

Minmax değeri, bir oyunda rasyonel oyuncunun karşı rakibin kazancına karşı güvence altına aldığı maksimum kayıptır. Sıfır toplamlı oyunlarda bir oyuncu eğer rakibinin kaybını maksimize ederse kendi kazancını da o derece maksimize etmiş olur. Minmax değerini bulmak için öncelikle karşı rakibin her bir strateji altında kazanabileceği maksimum kazancı tespit edilir ve bu kazançlar içinde rakibe minimum kazanç getirecek olan strateji seçilir (Karabacak, 2018).

Ödemeler matrisinde satır oyuncusu için maxmin strateji, minimum değerler içinden maksimum stratejiyi seçmek iken sütun oyuncusu için minimax strateji ise maksimum değerli stratejiler arasından minimum stratejiyi seçmektir (Çevikkan, 2010).

Tanım: İki kişili sıfır toplamlı bir oyunda minmax değeri aşağıdaki gibi tanımlanır (Karabacak, 2018; Ventsell, 1965);

2. oyuncunun minmax stratejisini seçmesi durumunda, 1. oyuncunun kazancı;

$$\max \min u(s_1, s_2) = \theta \to s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

1. oyuncunun maxmin stratejisini seçmesi durumunda, 2. oyuncunun kazancı;

$$\max \min u(s_1, s_2) = -\theta \to s_2 \in S_2, s_1 \in S_1 \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

İki durum genellenirse;

$$\max_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} min\ u(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2, s_1 \in S_1} min\big(-u(s_1, s_2)\big)$$

$$\max_{s_2 \in S_2, s_1 \in S_1} min\big(-u(s_1, s_2)\big) = -\min_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} max\, u(s_1, s_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tablo 25. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Minmax Değerinin Gösterimi

		2. Oyuncu			
		X	*Υ*	*Z*	***Min***$_{s2}$
1. Oyuncu	*X*	3, -3	-5, 5	-2, 2	5
	Υ	1, -1	4, -4	1, -1	-1
	Z	6, -6	-3, 3	-1, 5	5
	Min$_{s1}$	6	4	1	(1, -1)

Kaynak: Karabacak (2018: 197).

Tablo 25'te görüldüğü gibi Max$_{s1}$'de, 1. oyuncunun rakibinin muhtemel stratejilerine karşı kendi stratejileri ile elde edebileceği maksimum kazançları gösterilmektedir. Diğer yandan Max$_{s2}$'de de aynı şekilde 2. oyuncunun maksimum kazanç durumu gösterilmektedir.

Örnekte görüldüğü gibi 1. oyuncunun X, Y ve Z stratejileri karşısında, 2. oyuncunun minimum kazanç elde ettiği stratejisi Y'dir. Bu bağlamda 1. oyuncunun minmax stratejisi Y olur. Çünkü bu strateji 2. oyuncuya en az kazancı sağlayacak stratejidir. Diğer taraftan aynı mantık yürütüldüğünde 2. oyuncu için minmax strateji Z olur. Sonuç olarak her iki oyuncunun da minmax stratejisini seçmesi durumunda bu oyunun strateji profili (Y,Z) olur ve oyuncular sırasıyla 1 ve -1 kazancını elde eder (Karabacak, 2018; Ferguson, 2019).

4.2.3. Eyer Noktası ve Oyun Değeri

Oyunun değeri, sıfır toplamlı bir oyunda tarafların oyun sonunda yapacakları ödeme miktarına denir. Ayrıca bir oyunun değeri, oyuncuların maxmin ve minmax değerleri arasında bir noktada oluşur (Taha, 2000).

Maxmin ve minmax stratejilerinin kararlı olduğu bazı oyunlar vardır. Eğer maxmin ve minmax değeri birbirine eşit (Min$_{s1}$= Max$_{s2}$) olursa buna oyunun değeri denir ve (v) ile gösterilir (Ventsell, 1965).

Sıfır toplamlı bir oyunda 1. oyuncunun optimal stratejisi, farklı stratejiler altında elde edeceği muhtemel düşük kazançlar içinde en yükseğini tercih etmesidir. Başka bir ifade ile 1. oyuncunun maxmin strateji seçerek belli bir değerin altında kazanç sağlamamayı garanti altına alması optimal bir stratejidir. 1. oyuncunun maxmin strateji ile garanti altına aldığı bir maxmin değeri elde edilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\max_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} min\ u(s_1, s_2) = \propto.$$

Aynı oyunda 2. oyuncu da benzer bir mantık ile optimal stratejisini bulur. 2. oyuncu da 1. oyuncudan farklı strateji benimseyerek maksimum kazançların içinden en düşük olanı garanti altına alan bir strateji seçer. Başka bir ifade ile 2. Oyuncunun, minmax strateji seçerek 1. oyuncunun belli bir değerin üzerinde kazanç sağlamamasını garanti altına alması optimal bir stratejidir. 2. oyuncunun minmax stratejisi ile garanti altına aldığı maksimum kazanç kaybını ifade eden değer bulunur. Bu durum, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\min_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} max\, u(s_1, s_2) = \beta.$$

Sonuç olarak her iki strateji de optimal stratejidir.

Tablo 26. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Eyer Noktası ve Oyun Değeri

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min_{s1}
A_1	0.4	0.5	0.4	0.3	0.3
A_2	0.8	0.4	0.3	0.7	0.3
A_3	0.7	0.6	0.8	0.9	**0.6**
A_4	0.7	0.2	0.4	0.6	0.2
Max_{s2}	0.8	**0.6**	0.8	0.9	**(0.6, 0.6)**

Kaynak: Ventsell (1965: 16).

Tablo 26'da verilen örneğe bakıldığında, oyunun üst değeri $Min_{s1}=0.6$, alt değeri $Max_{s2}=0.6$'dır. Bunlar birbirine eşit ($v=Min_{s1}= Max_{s2}=0.6$) olduklarından, bu oyun için bir değer vardır denilir (Ventsell, 1965). A_3 ve B_2 stratejilerinin ürünü olan 0.6 elemanı kendi satırının en küçüğü ve sütunun ise en büyüğüdür. Bu bağlamda, geometrik yüzey üzerinde bu özelliklere sahip olan noktaya eyer noktası denir. Başka bir ifade ile optimal stratejilerin kesiştiği denge noktasına eyer noktası denir. Eyer noktasında oyuncuların başka bir strateji seçmeleri onlara daha yüksek kazanç değil, daha düşük bir kazanç getirir (Karabacak, 2018; Zagare, 1984).

4.2.4. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Nash Dengesi

İki kişili sıfır toplamlı oyunlarda eyer noktası ancak oyunculardan birinin maxmin stratejiyi, diğer rakibinin ise minmax stratejiyi seçmesi ve her iki optimal stratejinin örtüşmesi ile olur. Bununla birlikte optimal stratejilerin örtüştüğü değer, aynı zamanda oyunun değeridir. Sıfır toplamlı oyunlar eğer bir değere sahipse aynı zamanda bir dengeye de sahiptir (Karabacak, 2018; Taha, 2000).

Nash dengesinde rasyonel olan bir oyuncu, rakibinin hangi stratejileri oynamayacağı sorusuna karşın, bir dengenin hangi özelliklere sahip olması gerektiğine dair soruları cevaplamalıdır (Romp, 1997: 18-20). Nash dengesinde her bir oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların stratejilerine karşı en iyi stratejisidir (Fudenberg ve Tirole, 1991). Yani bir oyuncunun başka bir hamle yapması için başka bir nedenin olmadığı durumdur (Ateş, 2018).

Oyun değeri ile Nash dengesi arasında da bir ilişki söz konusudur. Şöyle ki, iki kişili sıfır toplamlı oyunlarda Nash dengesi, minimax ve maxmin strateji ile aynı sonucu vermektedir. John Nash, geliştirdiği denge kavramı ile iki kişili sıfır toplamlı oyunlardaki değer kavramını daha geniş çerçevede incelemiştir. Bu bağlamda yaptığı çalışmalarda, genel denge ile değer kavramını temel alan çözüm metodlarının örtüştüğünü tespit etmiştir.

Tanım; İki kişili sıfır toplamlı bir oyun eğer bir değere (v) sahip ve bu oyuncuların optimal stratejileri s_1^* ve s_2^* ise bu durumda $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ strateji profili Nash dengesi olur ve kazançlar da (v, -v) olarak gerçekleşir. Yani, iki kişili sıfır toplamlı bir oyunun Nash dengesi $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ ise bu oyun $u = (s_1^*, s_2^*)$ gibi bir değere sahip olur (Karabacak, 2018).

4.2.5. Karma Strateji

Sıfır toplamlı oyunlarda minmax ilkesinin kararlı olduğu oyunlarda saf strateji vardır. Eğer bir oyunda eyer noktası yoksa bu oyun kararsızdır. Bu tür oyunlarda sabit bir strateji olmadığı için saf strateji de yoktur (Taha, 2000).

Tablo 27. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Karma Strateji

		2. Oyuncu		
		X	***Y***	***Min$_{s2}$***
1. Oyuncu	***X***	0	100	0
	Y	25	0	0
	Max$_{s1}$	25	100	(0, 25)

Kaynak: Karabacak (2018: 205).

Tepe ya da eyer noktası yaklaşımına göre; eğer bir oyunda saf strateji ile denge değeri bulmak mümkün değilse karma strateji yöntemi kullanılır. Karma strateji ile oyuncular belli olasılık dağılımı yardımı ile stratejilerini seçerek hem belli miktarın altına düşmeyen kazancını hem de belli bir miktarın üzerine çıkmayan kaybını garanti altına almış olur. Böylece karma strateji ile elde edilen oyun değeri, beklenen değer olarak isimlendirilir (Straffin, 1993).

Tablo 27'de verilen oyunda, oyuncuların seçmiş oldukları optimal stratejileri sonucunda maxmin ve minmax değerleri eşit çıkmamıştır. Ayrıca bu oyun, bir eyer noktasına da sahip değildir.

Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncular, karma strateji ile elde edilen denge noktasından saparak daha iyi bir kazanç elde edemezler. Denge durumdaki bu tür stratejilere minmax karma stratejiler denir. Aynı zamanda bu tür stratejiler hem rasyonel oyuncular için optimaldir, hem de oyun değeri ortaya çıkaran bir çözümdür (Karabacak, 2018).

Tablo 28'de verilen oyunda, 1. oyuncunun X hareketini seçmesi q, Y hareketini seçmesi 1-q olasılık ile; 2. oyuncu ise X hareketini seçmesi p, Y hareketini seçmesi 1-p olasılık ile olsun.

Tablo 28. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Karma Strateji (Olasılık Dağılımının Eklemesi)

2. Oyuncu

1. Oyuncu		*X*	*Y*	*Min*$_{s2}$
	X	0	100	q=0.2
	Y	25	0	1-q=0.8
	Max$_{s1}$	p=0.8	1-p=0.2	

Kaynak: Karabacak (2018: 206).

2. oyuncun X hareketini seçmesi ile 1. oyuncunun kazancı ve 2. oyuncunun Y hareketini seçmesi sonucu 1. oyuncunun beklenen kazançları eşitlenirse (Karabacak, 2018);

$$0(q) + 25(1 - q) = 100(q) + 0(1 - q) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad q = 0.2 \; ve \; 1 - q = 0.8$$

sonucu elde edilir.

Diğer taraftan, 1. oyuncunun X hareketini seçmesi ile 2. oyuncunun kazancı ve 1. oyuncunun Y hareketini seçmesi sonucu 2. oyuncunun beklenen kazançları eşitlenirse;

$$0(p) + 100(1 - p) = 25(p) + 0(1 - p) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad p = 0.8 \; ve \; 1 - q = 0.2$$

sonucu elde edilir.

Elde edilen olasılık değerlerine bakıldığında 1. oyuncu her 5 seferden 1'inde X, 4'ünde ise Y hareketini; 1. oyuncu ise her 5 seferden 4'ünde X, 1'inde ise Y hareketini seçeceği görülmektedir. Oyun değeri;

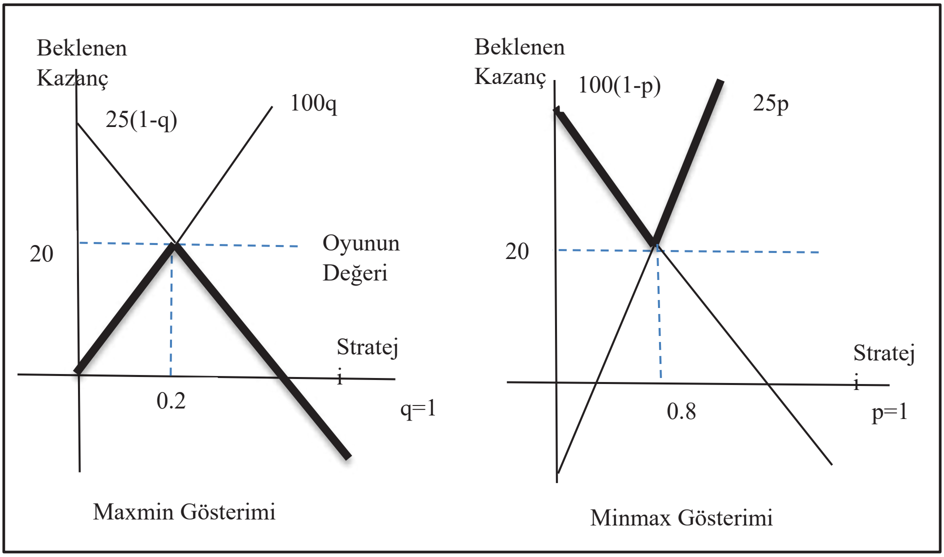
$$0(q) + 25(1 - q = 0(0.2) + 25(0.8) = 20$$

$$0(p) + 100(1 - p) = 0(0.8) + 100(0.2) = 20$$

1. oyuncunun optimal stratejisi: 0.2 X, 0.8 Y

2. oyuncunun optimal stratejisi: 0.8 X, 0.2 Y'dir.

Oyunun değeri ve optimal stratejiler, oyunun çözümüdür. Karma stratejilerde maxmin ve minmax değerlerinin nasıl bulunduğu Şekil 23'te verilmiştir.



Kaynak: Karabacak (2018: 210).

Şekil 23. Sıfır Toplamlı Oyunlarda Karma Stratejilerin Maxmin ve Minmax Değerlerinin Gösterimi

Şekil 22'de her iki oyuncunun optimal stratejileri altında minmax ve maxmin değerinin eşit olduğunu ifade eden oyun değeri verilmektedir. Bununla birlikte, 2. oyuncu $q < 0.2$ olduğunda X, $q > 0.2$ olduğunda ise Y stratejisini seçerek, rakibi olan 1. oyuncunun daha düşük beklenen kazanç elde etmesini sağlayacaktır. Ancak 1. oyuncu da 0.2 X, 0.8 Y karma stratejisini oynaması durumunda minimum kazançları arasında maksimum olanı garanti altına almış olacaktır. Çünkü 1. oyuncu 20 birim beklenen kazanç sağlayacak bir karma stratejiye sahiptir.

Diğer yandan, 1. oyuncu $p < 0.8$ olduğunda X, $p > 0.8$ olduğunda ise Y stratejisini seçip, beklenen kazancını artıracaktır. Ancak 2. oyuncunun da 0.8 X, 0.2 Y karma stratejisini oynaması durumunda, 1. oyuncu maksimum kazançları arasında minimum olanı garanti altına almış olacaktır. Buna karşın 2. oyuncu, 1. oyuncunun en çok 20 birim kazanç elde edeceği bir karma stratejiye sahiptir (Karabacak, 2018; Ferguson, 2019).

Kaynakça

Akerlof, G. A. (1970). The market for 'lemons': Quality uncertainty and the market mechanism. *The Quarterly Journal of Economics, 84*(3), 488-500.

Allan, P., & Dupont, C. (1999). International Relation Theory and Game Theory: Baroque Modeling Choices and Empirical Robustness. *International Political Science Review*, 1(20), 23-47.

Argoneto, P., & Renna, P. (2011). Game theory: An overview. In *Innovative tools for business coalitions in B2B applications* (pp. 25-46). London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-707-5_3

Arrow, J. K. (2003). Introductory remarks on the history of game theory. *Games and Economic Behavior*, 1(45), 14-18.

Arsham, H. (1995). Stabilty of Essential Strategy in Two-person Zero-sum Games. *Congressus Numerantium*, 110(3), 167-180.

Ateş, S. (2018). *Oyun Teorisi ve Uygulamaları.* Erişim: 18.05.2019, https://idari.cu.edu.tr/sanli/oyun.pdf.

Aumann, R., & Hart, S. (1992). *Handbook of Game Theory with Economic Applications* (Cilt 1). Amsterdam: Noth-Holland.

Aumann, R. J. (1987). Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica, 55*(1), 1-18.

Aumann, R. (1981). Survey of repeated games. In R. Aumann (Ed.), *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oscar Morgenstern* (pp. 11-42). Mannheim: Bibliographisches Institut.

Aumann, R. J., & Heifetz, A. (2002). Incomplete information. In R. Aumann, & S. Hart (Eds.), *Handbook of Game Theory with Economic Applications* (pp. 1665-1686). (Handbook of Game Theory with Economic Applications; Vol. 3). https://doi.org/10.1016/S1574-0005(02)03006-0

Axelrod, R. (1984). *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books.

Azimzadeh, A. (2019). *Davranışsal İktisat Nedir?*. Erişim: 12.01.2020, https://www.akademikkaynak.com/davranissal-iktisat-nedir.html.

Basar, T., & Olsder, G. J. (1999). *Dynamic noncooperative game theory*. New York: Academic Press.

Bekar, M. (2008). *Oyun Teorisi ve Ekonomik Modelleme*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Kütahya: Dumlu Pınar Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü.

Bhattacharya, R. (2016). Repeated Games. In M. Augier & D. J. Teece (Eds.), *The Palgrave Encyclopedia of Strategic Management*. Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1057/978-1-349-94848-2_593-1

Bierman, H. S., & Fernandez, L. (1998). *Game Theory with Economic Applications.* Massachusetts: Addison Wesley.

Bonanno, G. (2015). *Game Theory.* California: Open Access.

Börü, F. (2011). *Gelişmekte Olan Ülkelerde Meydana Gelen Döviz Krizleri Üzerine Bir Oyun Teorisi Modeli.* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi) İstanbul: İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Brander, J. A., & Spencer, B. J. (2022). Differentiated Entry or "Me-Too" Entry in Bertrand and Cournot Oligopoly. *Review of Industrial Organization*, *60*(1), 1–27. https://doi.org/10.1007/s11151-021-09822-1

Brandenburger, A. M., & Nalebuff, B. (1995). *The Right Game: Use Game Theory to Shape Strategy.* Harward Business Review.

Cabon-Dhersin, M. L., & Etchart-Vincent, N. (2012). The puzzle of cooperation in a game of chicken: An experimental study. *Theory and Decision, 72*(1), 65-87. https://doi.org/10.1007/s11238-010-9220-9

Cabrales, A., Nagel, R., & Armenter, R. (2007). Equilibrium selection through incomplete information in coordination games: An experimental study. *Experimental Economics, 10*(3), 221-234.

Cai, Y., & Daskalakis, C. (2011). On minmax theorems for multiplayer games. In *Proceedings of the 22nd annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms* (pp. 217-234).

Camerer, C. F. (2003). *Behavioral game theory: Experiments in strategic interaction*. New York: Princeton University Press.

Camerer, C. F., Loewenstein, G., & Prelec, D. (2005). Neuroeconomics: How neuroscience can inform economics. *Journal of Economic Literature, 43*(1), 9-64.

Ceylan, E. (2018). *Davranışsal Ekonomi.* Erişim: 23.10.2019, http://www.butundunya.com/pdfs/2018/06/128-132.pdf.

Charness, G., & Rabin, M. (2002). Understanding social preferences with simple tests. *Quarterly Journal of Economics, 117*(3), 817-869.

Chen, T.-L. (2017). Privatization and efficiency: a mixed oligopoly approach. *Journal of Economics*, *120*(3), 251–268. https://doi.org/10.1007/s00712-016-0502-8

Chiappori, P. A., Levitt, S., & Groseclose, T. (2002). Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer. *American Economic Review, 92*(4), 1138-1151.

Chong, J. K., Camerer, C. F., & Ho, T. H. (2006). A learning-based model of repeated games with incomplete information. *Games and Economic Behavior, 55*(2), 340-371.

Church, j., & Ware, R. (2000). *Industrial Organzations.* Boston: McGraw-Hill.

Costa-Gomes, M., & Crawford, V. P. (2001). Cognition and behavior in normal-form games: An experimental study. *Econometrica, 69*(5), 1193-1235.

Cournot, A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Paris: Hachette.

Çevikkan, N. (2010). *Oyun Teorisi ve Sektörel Bir Uygulama*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). İstanbul : Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Çoban, O. (2003). *Endüstri İktisadı ve Oyun Teorisi.* İstanbul: Hünkar Ofset, 20-21.

Çolak, K. (2017). *Toplu Pazarlık Uygulamamlarına Oyun Teoriksel Bir Yaklaşım (Türkiye'de Cam Sektörü Örneği)*. (Yayınlanmamış Doktora Lisans Tezi). Kocaeli: Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Deusch, K. W. (1988). *The Analysis of International Relation* . London: Ennlewood Cliffs.

Dixit, A. K., Skeath, S., & Reiley, D. H. (1999). *Game of Strategy*. New York: W.W. Norton & Company.

Duguid, S., Wyman, E., Bullinger, A. F., Herfurth-Majstorovic, K., & Tomasello, M. (2014). Coordination strategies of chimpanzees and human children in a stag hunt game. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences, 281*(1796), 20141973. http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2014.1973

Dumludağ, D., & Ruben, E. (2015). Davranışsal İktisadın Gelişimi. *İktisat ve Toplum Dergisi,* (58), 4-9.

Dutta, P. K. (1999). *Strategies and Games: Theory and Practice*. Massachusetts: The MIT Press,1-8

Easley, D., & Kleinberg, J. (2010). *From the book Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World.* New York: Cambridge University Press.

Eichherger, J. (1997). *Game Theory For Economists.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (2000). Quantum games and quantum strategies. *Physical Review Letters, 83*(15), 3077-3080.

Erev, I., & Roth, A. E. (1998). Predicting how people play games: Reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria. *American Economic Review, 88*(4), 848-881.

Erman, S. (2019). *Davranışsal İktisat Bağlamında Tüketici Davranışlarının İncelenmesi: Çevre Dostu Tüketim Örneği*. (Yüksek Lisans Tezi). İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Evyapan, B. (2009). *Oyun Teorisi ve İMKB'de Sektörel Bir Uygulama*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Eyster, E., & Rabin, M. (2005). Cursed equilibrium. *Econometrica, 73*(5), 1623-1672.

Falk, A., & Fischbacher, U. (2001). A theory of reciprocity. *CESifo Working Paper, No. 457*, Center for Economic Studies and ifo Institute (CESifo), Munich.

Fehr, E., & Schmidt, K. M. (1999). A theory of fairness, competition, and cooperation. *Quarterly Journal of Economics, 114*(3), 817-868.

Ferguson, T. S. (2000a). *Game Theory*. Erişim: 19.11.2019, http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15859-f01/www/notes/intro.pdf.

Fleckinger, P., & Lafay, T. (2010). Product flexibility and price competition in Hotelling's duopoly. *Elsevier, 60*(1), 61-68.

Fragaszy, D. M., Visalberghi, E., & Fedigan, L. M. (2004). *The complete capuchin: The biology of the genus Cebus*. Cambridge: Cambridge University Press.

Fujiwara, K. (2007). Partial privatization in a differentiated mixed oligopoly. *Journal of Economics, 92*(1), 51-65.

Fujiwara-Greve, T. (2015). Strategic dominance. In *Non-cooperative game theory* (Vol. 1, pp. 101-135). Tokyo: Springer.

The Florida State University (t.y). *Cournot Competition Under Asymmetric Information*.Erişim: 23.10.2019, http://myweb.fsu.edu/jnl08/resources/Advanced-Game-Theory/cournot-asym.pdf.

Fudenberg, D., & Maskin, E., (1986). The Folk Theorem in Repeated Games wilth Discounting ot with Incomplete Information. Econometrica, 54(3), 533-554.

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). *Game Theory*. London: The MIT Press.

Gabszewicz, J. J., & Mertens, J. F. (1971). An equivalence theorem for the core of an economy whose atoms are not 'too' big. *Econometrica, 39*(4), 713-721.

Geanakoplos, J., Pearce, D., & Stacchetti, E. (1989). Psychological games and sequential rationality. *Games and Economic Behavior, 1*(1), 60-79.

Gintis, H. (2009). *The bounds of reason: Game theory and the unification of the behavioral sciences*. New Jersey: Princeton University Press.

Gintis, H. (2006). *Game Theory Evolving*. New Jersey: Princeton Universitey Press .

Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists* . New Jersey: Princeton University Press .

Gibbons, R. (1997). An Introduction to Applicable Game Theory. *Journal of Economic Perspective*, 1 (11), 127-149.

Giz, D. (2003). *OyunTeorisi ve İktisadi Uygulamalar*. İstanbul: Filiz Kitabevi.

Goeree, J. K., & Holt, C. A. (2001). Ten little treasures of game theory and ten intuitive contradictions. *American Economic Review, 91*(5), 1402-1422.

Goeree, J. K., Holt, C. A., & Palfrey, T. R. (2003). Risk averse behavior in generalized matching pennies games. *Games and Economic Behavior*, *45*(1), 97–113. https://doi.org/10.1016/S0899-8256(03)00052-6

Gossner, O., & Tomala, T. (2007). *Repeated Games*. Olivier Gossner, Erişim: 24.02.2019, http://gossner.me/wp-content/uploads/2017/01/RG_3dec07.pdf.

Häckner, J. (2000). A Note on Price and Quantity Competition in Differentiated Oligopolies. *Journal of Economic Theory*, *93*(2), 233–239. https://doi.org/10.1006/jeth.2000.2654

Hargreavs-Heap, S., & Varoufakis, Y. (2004). *Game Theory*. London: Routledge.

Harsanyi, J. C. (1967). Games with incomplete information played by 'Bayesian' players. *Management Science, Part I, Part II and Part III*, 159-182,320-334 and 486-502.

Harsanyi, J.C. & Selten R. (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. Cambridge: MIT Press.

Harsanyi, J. C. (1973). Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. *International Journal of Game Theory, 2*(1), 1-23.

Hayashi, T. (2021). Basic game theory III: Games with incomplete information. In *Microeconomic theory for the social sciences* (pp. 523-546). Singapore: Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-16-3541-0_24

Henrich, J., et al. (2005). 'Economic man' in cross-cultural perspective: Behavioral experiments in 15 small-scale societies. *Behavioral and Brain Sciences, 28*(6), 795-815.

Holler, M. J., & Klose-Ullmann, B. (2020). Step-by-Step: The Subgame-Perfect Equilibrium. In *Scissors and Rock* (pp. 125–140). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44823-3_8

Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41. https://doi.org/10.2307/2224214

Hogarth, D. (2019). *Program for Solving Two-person Zero-sum games*. Erişim: 17.08.2019, https://www.bath.ac.uk/publications/university-ordinances/#intelprop.

Hoteling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, (39), 41-57.

Hu, H., & Stuart, J. . H. W. (2002). An epistemic analysis of the Harsanyi transformation. *International Journal of Game Theory*, *30*(4), 517–525. https://doi.org/10.1007/s001820200095

Hu, W., Xiao, J., & Zhou, X. (2014). Collusion or Competition? Interfirm Relationships in the <scp>C</scp> hinese Auto Industry. *The Journal of Industrial Economics*, *62*(1), 1–40. https://doi.org/10.1111/joie.12035

Jhonsmithk. (2013). *Applying Game Theory to the patent war between Apple and Samsung.* Erişim: 12.13.2019, https://johnsmithk.wordpress.com/.

Kandori, M., & Ui, T. (2020). Introduction to fundamental issues in game theory and market design. *The Japanese Economic Review, 27*(1), 1-5. https://doi.org/10.1007/s42973-019-00008-9

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York: Farrar, Straus and Giroux.

Karabacak, H. (2008). *Oyun Teorisi ve Kamuyu Aydınlatmada Bir Deneme Modeli*. (Yayınlammamış Doktora Tezi). Ankara: Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Karabacak, H. (2018). *Yeni Başlayanlar için Oyun Teorisi.* Ankara: Seçkin.

Kelly, A. (2003). *Decision Making using Game Theory.* Cambridge: UK:Cambridge University Press.

Kuhn, H. W. (1953). Extensive games and the problem of information. In H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), *Contributions to the theory of games II* (pp. 193-216). Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400881970-012

Kydd, A. H. (2000). Trust, reassurance, and cooperation. *International Organization*, *54*(2), 325-357.

Koçkesen, L. (2019a). Strategic Form Games with Incomplate Information. Erişim: 27.10.2019, http://home.ku.edu.tr/~lkockesen/teaching/econ333/slides/5-Bayesian-Games-Handout.pdf.

Koçkesen, L. (2019b). *Microeconomics II Strategic Form Games: Applications. Erişim: 14.07.2019,* http://home.ku.edu.tr/~lkockesen/teaching/mamicro/handouts/4%20Strategic%20Form%20Games%20Applications%20Handout.pdf.

Koçkesen, L., & Ok, E. A. (2007). *An Introduction to Game Theory*. New York: Erişim: 16.02.2019, http://home.ku.edu.tr/~lkockesen/teaching/econ333/lectnotes/uggame.pdf.

Kohlberg, E. & Mertens, J.F. (1986). On The Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica*, 54(5), 1003-1037.

Kreps D. & Wilson R., (1982). Sequentail Equilibria. *Econometrica,* (50(4), 863-94.

Lee, J. (2013). *Signaling Games: Theory and Applications.* Maastricht: Universitaire Pers.

Leonard, R. (2008). Game theory in economics, origins of. In S. N. Durlauf & L. E. Blume (Eds.), *The new Palgrave dictionary of economics* (pp. 100-

115). London: Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1057/978-1-349-95121-5_1922-1

Lu, Y. (2006). Hotelling¡¯s Location Model in Mixed Duopoly. *Economics Bulletin, 1*(10), 1-10.

Marchionatti, R. (2024). The development of the theory of games at Princeton and the Rand Corporation. In *Economic theory in the twentieth century, an intellectual history—Volume III* (pp. 111-145). Cham: Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50222-4_5

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the theory of games*. Cambridge: Cambridge University Press.

Marwala, T. (2023). Game theory in politics. In *Artificial intelligence, game theory and mechanism design in politics* (pp. 33-58). Singapore: Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-981-99-5103-1_2

Miller, J. E., Amit, E., & Posten, A. C. (2016). Behavioral economics. In H. ten Have (Ed.), *Encyclopedia of global bioethics* (pp. 1-10). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09483-0_37

Montet, C., & Serra, D. (2003). *Game Theory and Economics.* New York: Red Globe Press.

Munoz-Garcia, F., & Toro-Gonzalez, D. (2019). Dominance solvable games. In *Strategy and game theory* (pp. 89-105). Cham: Springer.

Munoz-Garcia, F., & Toro-Gonzalez, D. (2019). Simultaneous-Move Games with Incomplete Information. In *Springer Texts in Business and Economics* (pp. 323–353). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11902-7_7

Myers, S. C., & Majluf, N. S. (1984). Caporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information That Investors Do To Have . *Journal of Financial Economics* , 2(13), 187-221.

Myerson, R. B. (1991). *Game Theory, Analysis of Conflict.* Cambridge: Massachusetts:Harvard Üniversty.

Nagurney, A., & Li, D. (2014). A dynamic network oligopoly model with transportation costs, product differentiation, and quality competition. *Computational Economics, 44*(2), 201-229.

Nash, J. (1953). Two-person cooperative games. *Econometrica, 21*(1), 128-140.

Nash, J. (1950a). Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of The National Academy of Sciences of The United States of America* (36), 48-49.

Nash, J. (1950b). The Bargaining Problem. *Econometrica*, (18), 155-162.

Nash, J. (1951). Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics,* (54), 286-295.

Neumann, J. V., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. New York : Princeton University Press.

Nisan, N., & Roughgarden, T. (2004). *Algorithmic game theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Núñez, J. (2022). Game theory. In A. Farazmand (Ed.), *Global encyclopedia of public administration, public policy, and governance* (pp. 1-10). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66252-3_2684

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. The MIT Press.

Özdamar, Ö. (2007). Oyun Kuramının Uluslararası İlişkiler Yazınına Katkıları. *Uluslararası İlişkiler Dergisi*, *4*(5), 33-65.

Özertürk, S. (t.y.). *ECO 5341 Cournot Competition under Asymmetric Information*. Erişim: 05.01.2019, http://faculty.smu.edu/ozerturk/asymmetric-cournot.pdf.

Özkan, Ş. (2005). *Yöneylem Araştırması Nicel Karar Teknikleri*. İstanbul: Nobel Yayın Dağıtım.

Patrí, S., & Sacco, A. (2017). Sequential Entry in Hotelling Model with Location Costs: A Three-Firm Case. In *Springer Optimization and Its Applications* (Vol. 118, pp. 261–272). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52654-6_12

Perea, A. (2001). Backward Induction and Nash Equilibrium. In Rationality in Extensive Form Games. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3391-4_3

Peters, H. (2008). Finite Games with Incomplete Information. In *Game Theory* (pp. 59–71). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69291-1_5

Political Science. (t.y.). *Oyun Teorisi: Anlam, Köken, Türleri ve Uygulama*. Erişim: 28.10.2018, http://www.politicalsciencenotes.com/games-theory/games-theory-meaning-origin-types-and-application/741.

Ramusen, E. (1989). *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. Cambridge: Basil Blackwell.

Rasmusen, E. (1992). Folk theorems for the observable implications of repeated games. *Theory and Decision*, *32*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00134049

Ratliff, J. (1996). *Infinitely Repeated Games with Discounting Ù*. Erişim: 10.10.2019, https://nuanceabounds.org/wp-content/uploads/Ratliff_GTC_5.2_Infinitely_Repeated_Games.pdf.

Rebano, M. C. (2019). *Game Theory Within The Apple vs Samsung Rıvalry*. Erişim: 11.16.2019, https://economicsdealers.wordpress.com/2019/02/15/game-theory-within-the-apple-vs-samsung-rivalry/.

Romp, G. (1997). *Game Theory, Introduction and Applications*. New York: Oxford University Press.

Rubinstein, A. (1982). Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica, 50*(1), 97-109.

Schelling, T. C. (1960). *The strategy of conflict*. Massachusetts: Harvard University Press.

Schroeder, E., & Tremblay, V. J. (2014). Union Bargaining in an Oligopoly Market with Cournot-Bertrand Competition: Welfare and Policy Implications. *Economies, 2*(2), 95-108.

Schwalbe, U. W. (2001). Zermelo and the Early History of Game Theory. *Games and Economic Behavior*, (34), 122-124.

Selten, R., (1965). Spieltheoretische Behanglung enines Oligopolmedells mit Nachfragetragheit. *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenchaft*, (121), 301-324.

Selten, R., (1975). Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in *Extensive Games. International Journal of Game Theory*. (4), 25-55.

Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. In H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), *Contributions to the theory of games II* (pp. 307-317). Princeton: Princeton University Press.

Skyrms, B. (2004). *The stag hunt and the evolution of social structure*. Cambridge: Cambridge University Press.

Smith, V. L. (2003). Constructivist and ecological rationality in economics. *American Economic Review, 93*(3), 465-508.

Sun, S., & Sun, N. (2018). Credible commitment and credible threat in games. In *Management game theory* (pp. 71-92). Singapore: Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1062-1_5

Shy, O. (1996). *Industrial Organization: Theory and Applications.* Cambridge: The MIT Press.

Slantchev, B. L. (2008). *Static and Dynamic Games of Incomplate Information*. San Diego: University of California.

Slantchev, B. L. (2004b). *Game Theory: Repeated Games*. San Diego: University of California.

Sobel, J. (2007). *Signaling Games.* Erişim: 11.03.2019, https://econweb.ucsd.edu/~jsobel/Paris_Lectures/20070527_Signal_encyc_Sobel.pdf.

Spence, M. (1973). Job Market Signaling. *The Quarterly Journal of Economics*, 3(87), 355-374.

Straffin, P. D. (1993). *Game Theory and Strategy*. Washington: Mathematical Association of America.

Şahin, S., & Eren, E. (2012). OyunTeorisinin Gelişimi ve İktisat Paradigmasının Oluşmasına Etkileri. *Hukuk ve İktisat Araştırmaları Dergisi*, (4), 267-270.

Taha, H. A. (2000). *Yöneylem Araştırması.* (Ş. A. Baray, & Ş. Esnaf, Çev.) İstanbul: Literatür Yayıncılık.

Tirole, J. (1989). *The Theory of Industrial Organization.* London: MIT Press.

Taylor, Z. (2016). Could Game Theory be considered part of Behaviroal Economics? Erişim: 12.01.2020, https://www.quora.com/Could-Game-Theory-be-considered-part-of-Behavioral-Economics.

Tüzel, M. F. (2019). *Davranışsal İktisat Perspektifinden Enflasyonist Ortamda Tüketici Davranışları.* . (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Afyon: Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Fakültesi.

Uçan, O., & Aytekin, i. (2013). Oyun Teorisi Çerçevesinde Ekonominin Dinanmik Oyun Modellerine Uygulanması. *International Journal of Social Science*, 3(6), 747-757.

Vadhera, D. (2015). Nash Equilibrium. *IOSR Journel of Economics and Finance (IOSR-JEF)*, 6(6), 13-18.

van Leeuwen, E., & Lijesen, M. (2016). Agents playing Hotelling's game: an agent-based approach to a game theoretic model. *The Annals of Regional Science*, *57*(2–3), 393–411. https://doi.org/10.1007/s00168-015-0711-z

Ventsell, E. S. (1965). *Oyun Teorisine Giriş.* (H. Yüksel, Çev.) İstanbul: Türk Matematik Derneği Yayınları.

Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance, 16*(1), 8-37.

Volij, O. (2009). Static games. In R. A. Meyers (Ed.), *Encyclopedia of complexity and systems science* (pp. 8861-8877). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_517

Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior* (60th Anniversary Commemorative Edition). New Jersey: Princeton University Press.

Walker, M., & Wooders, J. (2001). Minimax Play at Wimbledon. *American Economic Review*, *91*(5), 1521–1538. https://doi.org/10.1257/aer.91.5.1521

Walras, L. (1874). *Éléments d'économie politique pure [Elements of pure economics]*. Paris: Lausanne.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applicationc and Algorithms.* Bloomington: Duxbury Press.

Yavuzaslan, K. (2018). Deneysel İktisat ve Kültürel Farklılıkların Deneysel İktisatla İfadesi. *Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(2), 217-231.

Yiğit, A. G. (2018). Davranışsal İktisadın Anlaşılmasına Yönelik Bir Literatür Taraması. *MCBÜ Sosyal Bilimler Dergisi, 16*(2), 161-190.

Yıldırım, S. (2006). *Oyun Teorisi ile İMKB'de Sektör Analizi*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). İstanbul: Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Yıldız, M. (2005). *Oyun Teorisinin Ekonomik Uygulamaları*. Erişim: 10.20.2018, http://www.acikders.org.tr/course/view.php?id=106.

Yılmaz, E. (2016). *Oyun Teorisi.* İstanbul: Literatür.

Zagare, F. C. (1984). *Game Theory: Conceptv and Applications* . California: Sage Publications.

Zusai, D. (2018). Tempered best response dynamics. *International Journal of Game Theory*, *47*(1), 1–34. https://doi.org/10.1007/s00182-017-0575-9

OYUN TEORİSİ
Strateji ve Karar Mekanizmaları

Doç. Dr. Mehmet POLAT
Prof. Dr. Yusuf AKAN

ÖZGÜR
YAYINLARI

ISBN 978-975-447-903-4
9 789754 479034