Bölüm 3

Ters Matris Yöntemi Kullanılarak Kosinüs Fonksiyonunun Kuvvetinin İntegralinin Hesaplanması

Ferit Gürbüz[1]

Özet

Ters matris yöntemi kabaca N tane doğrusal eşitlik ve n tane bilinmeyenden oluşan denklem sisteminin çözümünde yararlanılan yöntemdir. Böyle bir denklem sistemi matris ve vektörler kullanarak $Ax = b$ biçiminde ifade edilir. Burada A katsayılar matrisini, x çözüm vektörünü ve b de sabitler vektörünü verir. Eğer A matrisin tersi alınabilirse x in çözümü, $x = A^{-1}b$ şeklindedir. Bu çalışmada, kosinüs fonksiyonunun integralini belirlemek için ters matris yöntemini kullandık. Elde ettiğimiz formül, kosinüs fonksiyonunun integralini bulmaya alternatif bir yol olarak kullanılabilir.

1. Giriş

Matrisler, doğrusal denklem sistemlerinin çözümünü bulma [1], formülleri basitleştirmek için doğrusal diferansiyel denklem sistemlerini matris biçiminde yazma [2] gibi birçok farklı matematiksel problemde kullanılabilir. 2014 yılında Matlak vd. [3], çift kuvvet ve tek kuvvet olarak sınıflandırılan sinüs fonksiyonlarının kuvvetlerinin belirsiz integralini bulmak için matris tersinin uygulamalarını verdi. Her şeyden önce, yazarlar [3] aşağıdaki diferansiyel denklem sisteminden bahsetmiştir.

$$\begin{aligned} f_1' &= a_{1,1}f_1 + \cdots + a_{1,n}f_n \\ f_2' &= a_{2,1}f_1 + \cdots + a_{2,n}f_n \\ &\vdots \\ f_n' &= a_{n,1}f_1 + \cdots + a_{n,n}f_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub568.c2317

sistemi

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}f_1 + \cdots + a_{1,n}f_n \\ \vdots \\ a_{n,1}f_1 + \cdots + a_{n,n}f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris formunda yazılabilir.

Sistem (1.1) in $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ matrisinin tekil olmadığını varsayalım. Ayrıca, sistem (1.1) in $(f_1, f_2, ..., f_n)^T$ çözümlerinin lineer eşlemesini aşağıdaki gibi

$$T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

T olarak alalım ve $g_1, g_2, ..., g_n$ fonksiyonlarının denklem (1.1) sisteminin çözümü olduğunu varsayalım. Böylece,

$$T\left(A^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \right) = AA^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

olur. Eğer,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ise bu durumda $i = 1, 2, ..., n$ için G_i ler g_i lerin belirsiz integrali olur. İntegrali bulmak için bir örnek olarak, Swartz'ın [4] makalesinden esinlenerek

$$g_1(x) = \cosh ax \sin bx \quad , \quad g_2(x) = \cosh ax \cos bx$$

$$g_3(x) = \sinh ax \cos bx \quad , \quad g_4(x) = \sinh ax \sin bx$$

fonksiyonlarını verebiliriz. Bu durumda, operatörler matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$T\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \\ g'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & a \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \\ a & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

Eğer $ab \neq 0$ ise T operatörünün matrisinin tersi şu şekildedir:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu nedenle,

$$\int g_1(x)\,dx = \frac{-bg_2(x) + ag_4(x)}{a^2 + b^2}$$

$$\int g_2(x)\,dx = \frac{bg_1(x) + ag_3(x)}{a^2 + b^2}$$

gibi integralleri bulmak mümkündür.

Bu çalışmada, kosinüs fonksiyonunun çift ve tek kuvvetlerinin belirsiz integralinin formüllerini ters matris kullanarak bulmak için bu yöntemi kullanacağız. Burada, integral sabitleri atlanmıştır ve bu kural bundan sonra da geçerli olacaktır.

Son olarak, çalışma boyunca çift faktöriyelin (tüm n tam sayıları için) tanımı aşağıdaki gibi kullanılacaktır:

$$n!! = \begin{cases} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2k) & , \quad n \geq 1 \text{ tek ise} \\ \prod_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (n-2k) & , \quad n \geq 2 \text{ çift ise} \\ 1 & , \quad n \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} n(n-2)\cdots 1 & , \quad n\geq 1 \text{tek ise} \\ n(n-2)\cdots 2 & , \quad n\geq 2 \text{çift ise} \\ 1 & , \quad n\leq 0 \text{ise} \end{cases}$$

2 Ana Sonuçlar

2.1 $\boldsymbol{n}$ tek olmak üzere $\boldsymbol{\cos^n x}$ nin integrali

$n=1,3,5,\ldots$ için $g(x)=\cos^n x$ olsun. Bu durumda, $g(x)$ in ikinci türevleri

$$(\cos^n x)'' = \left(-n\cos^{n-1}x\sin x\right)' = n(n-1)\cos^{n-2}x - n^2\cos^n x$$ olur.

Buradan $g(x)$ in ikinci türev operatörünü aşağıdaki matris biçiminde yazabiliriz:

$$A_k\begin{pmatrix} cosx \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cosx)'' \\ (\cos^3 x)'' \\ \vdots \\ (\cos^k x)'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cosx \\ 6cosx - 9\cos^3 x \\ \vdots \\ k(k-1)\cos^{k-2}x - k^2\cos^k x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3\cdot 2 & -3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k(k-1) & -k^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} cosx \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix},$$

burada k tek bir sayıdır. $detA_k = (-1)^{\frac{k+1}{2}}(k!!)^2 \neq 0$ olduğundan ve A_k ; [3] de $\sin x$ fonksiyonunun tek kuvveti durumunda matrise karşılık geldiğinden, ters matris

$$A_k^{-1} = [a_{i,j}]_{\frac{k+1}{2}\times\frac{k+1}{2}}$$

şeklindedir, burada

$$a_{i,j}=\begin{cases} 0 & , \quad i<j \\ -\dfrac{1}{(2i-1)^2} & , \quad i=j \\ -\dfrac{(n-2)!!}{n(n-1)!!}\dfrac{1}{(2i-1)}\dfrac{(2i-2)!!}{(2i-3)!!} & , \quad i>j \end{cases}$$

dir.

(1.2) ve (1.3) den

$$\begin{pmatrix} \int\left(\int \cos x dx\right)dx \\ \int\left(\int \cos^3 x dx\right)dx \\ \vdots \\ \int\left(\int \cos^k x dx\right)dx \end{pmatrix} = A_k^{-1}\begin{pmatrix} cosx \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\frac{k+1}{2}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\frac{k+1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\frac{k+1}{2},1} & a_{\frac{k+1}{2},2} & \cdots & a_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} cosx \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{1,1}cosx + a_{1,2}\cos^3 x + \cdots + a_{1,\frac{k+1}{2}}\cos^k x \\ a_{2,1}cosx + a_{2,2}\cos^3 x + \cdots + a_{2,\frac{k+1}{2}}\cos^k x \\ \vdots \\ a_{\frac{k+1}{2},1}cosx + a_{\frac{k+1}{2},2}\cos^3 x + \cdots + a_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}}\cos^k x \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\int\left(\int \cos^k x dx\right)dx = a_{\frac{k+1}{2},1} cosx + a_{\frac{k+1}{2},2} cos^3 x + \cdots + a_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}} cos^k x$$

$$= -\frac{1}{k}\frac{(k-1)!!}{(k-2)!!}\left(\frac{(1-2)!!}{1(1-1)!!}\cos x + \frac{(3-2)!!}{3(3-1)!!}\cos^3 x + \frac{(k-2)!!}{k(k-1)!!}\cos^k x\right)$$

olur.

$n = 1,3,5,...,k$ olduğu için

$$\int\left(\int \cos^n x dx\right)dx = -\frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\frac{1}{2i+1}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cos^{2i+1} x\right) \qquad (2.1)$$

bulunur. Sonra (2.1) de türev alınırsa,

$$\int \cos^n x dx = -\frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\frac{d}{dx}\frac{1}{2i+1}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cos^{2i+1} x\right)$$

$$= -\frac{(n-1)!!}{n!!}\sin x\left(\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cos^{2i} x\right)$$

elde edilir.

Örneğin n=5 olduğunda,

$$\int \cos^n x dx = \frac{(5-1)!!}{5!!}\sin x\left(\sum_{i=0}^{(5-1)/2}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cos^{2i} x\right)$$

$$= \frac{8}{15}\sin x + \frac{4}{15}\sin x\cos^2 x + \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x$$

olur.

2.2 n çift olmak üzere $\cos^n x$ nin integrali

$n = 2,4,6,\ldots$ için $g_n(x) = \cos^n x - \frac{n-1}{n}\cos^{n-2} x$ olsun. Bu durumda, $g_n(x)$ in ikinci türevleri

$$(g_n(x))'' = (\frac{n-1}{n}(n-2)\sin x\cos^{n-3}x - n\sin x\cos^{n-1}x)'$$

$$= (n-2)^2(n-1)/n\left(\cos^{n-2}x - \frac{n-3}{n-2}\cos^{n-4}x\right) - n^2\left(\cos^n x - \frac{n-1}{n}\cos^{n-2}x\right)$$

olur. Buradan $g_n(x)$ in ikinci türev operatörünü aşağıdaki matris biçiminde yazabiliriz:

$$B_k\begin{pmatrix} g_2(x \\ g_4(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_2(x))'' \\ (g_4(x))'' \\ \vdots \\ (g_k(x))'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \\ 3\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) - 16\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) \\ \vdots \\ (k-2)^2(k-1)/k\left(\cos^{k-2}x - \frac{k-3}{k-2}\cos^{k-4}x\right) - k^2\left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2}x\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2^2\,\hat{A}3/4 & -4^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (k-2)^2(k-1)/k & -k^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} g_2(x \\ g_4(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$$

burada k çift bir sayıdır. $detB_k = (-1)^{\frac{k}{2}}(k!!)^2 \neq 0$ olduğundan ve B_k; [3] de $\sin x$ fonksiyonunun çift kuvveti durumunda matrise karşılık geldiğinden, ters matris

$$B_k^{-1} = [b_{i,j}]_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}$$

şeklindedir, burada

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \quad i < j \\ -\dfrac{1}{(2i)^2} & , \quad i = j \\ -\dfrac{1}{(2i)^2}\dfrac{(2i-1)!!}{(2j-1)!!}\dfrac{(2j)!!}{(2i)!!} & , \quad i > j \end{cases}$$

dir.

(1.2) ve (1.3) den

$$\begin{pmatrix} \int\left(\int\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)dx\right)dx \\ \int\left(\int\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right)dx\right)dx \\ \vdots \\ \int\left(\int\left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right)dx\right)dx \end{pmatrix} = B_k^{-1}\begin{pmatrix} \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \\ \left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) \\ \vdots \\ \left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,\frac{k}{2}} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,\frac{k}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{k}{2},1} & b_{\frac{k}{2},2} & \cdots & b_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \\ \left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) \\ \vdots \\ \left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1,1}\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) + b_{1,2}\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) + \cdots + b_{1,\frac{k}{2}}\left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right) \\ b_{2,1}\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) + b_{2,2}\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) + \cdots + b_{2,\frac{k}{2}}\left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right) \\ \vdots \\ b_{\frac{k}{2},1}\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) + b_{\frac{k}{2},2}\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x\right) + \cdots + b_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}\left(\cos^k x - \frac{k-1}{k}\cos^{k-2} x\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

A_k ile aynı şekilde, n çift olmak üzere aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\int\left(\int cos^n xdx\right)dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\frac{x^2}{2} - \sum_{i=1}^{n/2}\frac{(2i)!!}{(2i-1)!!(2i)^2}\cos^{2i}x\right). \tag{2.2}$$

Böylece, (2.2) de türev alınırsa

$$\int \cos^n xdx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} - \sum_{i=1}^{n/2}\frac{(2i)!!}{(2i-1)!!(2i)^2}\cdot\frac{d}{dx}\cos^{2i}x\right)$$

$$= \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(x + \sin x\sum_{i=1}^{n/2}\frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!}\cos^{2i-1}x\right).$$

olur.

3 Sonuçlar

Bu çalışmada, ters matris yöntemini kullanarak belirsiz bir integrali bulmayı ele aldık. Ele aldığımız fonksiyon kosinüs fonksiyonudur. İlgilenilen fonksiyon kosinüs fonksiyonudur.. Amacımız ise, kosinüs fonksiyonunun tek ve çift kuvvetlerinin belirsiz integrallerinin formüllerini ters matris yöntemini kullanarak ayrı ayrı vermektir.

Çarpım fonksiyonlarının ve bileşke fonksiyonlarının n-kez diferansiyellenebilmesiyle elde edilen matrisin diğer bazı uygulamaları [5] de incelenmiştir. Ayrıca, çalışmada elde edilen formüller, trigonometrik özdeşlikleri üretmek için kullanılmıştır.

4 Kaynakça

[1] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 1993.

[2] D. G. Zill, M. R. Cullen, Differential Equations with Boundary-Value Problems, 1997.

[3] D. Matlak, J. Matlak, D. Slota, R. Witula, Differentiation and integration by using matrix inversion, Journal of Applied Mathemetics and Computational Mechanics, **13**, no.2, (2014), 63–71.

[4] W. Swartz, Integration by matrix inversion, The American Mathematical Monthly, **4**, (1958), 282–283.

[5] R. Redheffer, Induced transformations of the derivative - vector, The American Mathematical Monthly, **83** (1976), 255-259.