Bölüm 6

Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü

Bülent Karakaş[1]

Şenay Baydaş[2]

Özet

$\mathbb{R}^3$ uzayının elemanları üzerinde kurulan yapıya göre isimlendirilir. $\mathbb{R}^3$ uzayı afin yapıyla ele alındığında noktalar cümlesi, vektör uzayı yapısıyla ele alındığında vektörler cümlesi, projektif yapısıyla ele alındığında yönlü doğrular cümlesi olarak ele alınabilir. Her farklı durum için $\mathbb{R}^3$ uzayının izomorfik olduğu yapılar farklılık gösterir. Birebir eşlemelerden biri R^3 ün yönlü doğrularının birebir eşlendiği birim dual küredir.

Birim dual kürenin temelinde olan dual sayılar, Clifford [1,2] tarafından tanımlanmış olan sıfırdan farklı ancak kendisiyle dual çarpımı sıfır olan dual birimle tanımlanan sayılardır.

Birim dual küre [3,4] form olarak küre konseptine sahip, dual çarpımı ve dual iç çarpımı kullanarak tanımlanan küredir. Birim dual kürenin yönlü doğrularla [4] birebir eşlemesi sonucu olarak R^3 uzayındaki regle yüzeyler birim dual kürenin eğrileriyle eşlenir ve incelemeler senkronize olarak ele alınabilir.

1. DUAL SAYILAR

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini göstersin.

$$*:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (a,b)*(c,d)=(ac,ad+bc)$$

olarak tanımlanan işleme dual çarpım işlemi denir [4].

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},*)$ ikilisi $\mathfrak{D}$ ile gösterilsin. $\mathfrak{D}$ üzerinde toplama işlemi

$$\mathfrak{D}\ \mathrm{x}\ \mathfrak{D}\to\ \mathfrak{D}\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\oplus(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$$

olarak tanımlansın. $(\mathfrak{D},\ \oplus,*)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır. Yani aşağıdaki şartlar sağlanır.

1 Bartın Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Bartın, bk@bartin.edu.tr,

2 Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, sbaydas@yyu.edu.tr

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub568.c2320

1. ($\mathfrak{D}$, $\oplus$) değişmeli bir gruptur,

2. $\mathfrak{D}$ de $*$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir,

3. $\mathfrak{D}$ de $*$ işlemi $\oplus$ işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliğine sahiptir.

($\mathfrak{D}$, $\oplus$,$*$) birimli ve değişimli halkasına ***dual sayılar cümlesi*** denir.

Bir $d=(a,b)\in\mathfrak{D}$ dual sayısı

$$d=(a,b)$$
$$=(a,0)+(0,b)$$
$$=a(0,1)+b(0,1)$$

olarak yazılabilir. Bu yazılışla birlikte $(0,1)$ dual sayısına d nin reel birimi ve $(0,1)$ dual sayısına da d nin dual birimi adı verilir.

Dual birimi ε ile gösterilsin. ε nin kendisiyle dual çarpımı klasik dual sayı tanımına götüren bir özelliğe sahiptir.

Çarpma işlemi yapılırsa

$$\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}=(0,1)*(0,1)$$
$$=(0.0,0.1+1.0)$$
$$=(0,0)$$

ve $\{(a,0)|(a.0)\in\mathfrak{D}\}\to\mathbb{R}$ birebir eşlemesinden dolayı $\boldsymbol{\varepsilon}^2=0$ elde edilir. Bu son eşitlik dual sayıların klasik tanımındaki ön şarttır.

$\{(a,0)|(a.0)\in\mathfrak{D}\}\to\mathbb{R}$ ve $\{(0,b)|(0.b)\in\mathfrak{D}\}\to\mathbb{R}$ bire bir eşlemeleri kullanılarak bir

$d=(a,b)\in\mathfrak{D}$ dual sayısı dual birimin ε ile gösterimi de kullanılarak

$\overline{d}=a+\boldsymbol{\varepsilon}b$

şeklinde veya yaygın kullanımıyla $d=a+\boldsymbol{\varepsilon}a^*$ yazılabilir. $d=a+\boldsymbol{\varepsilon}a^*$ dual sayısının eşleniği ise $d=a-\boldsymbol{\varepsilon}a^*$ olarak tanımlıdır.

2. Birim Dual Küre

$\mathfrak{D}$ dual sayılar cümlesini göstersin.

$$\mathfrak{D}^3=\mathfrak{D}\,\mathrm{x}\mathfrak{D}\,\mathrm{x}\mathfrak{D}$$

olarak tanımlanan cümle üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\forall A \in \mathfrak{D}^3,\ A = \left(A_1, A_2, A_3\right), A = \left(a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*\right),$$

$\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_i^*} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall A, B \in \mathfrak{D}^3$ ve $\forall \lambda \in \mathfrak{D}$ için

Toplama işlemi:

$$\oplus : \mathfrak{D}^3 x \mathfrak{D}^3 \to \mathfrak{D}^3, A + B = \left(A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3\right)$$

Skaler ile çarpma işlemi: , $\lambda \odot \boldsymbol{A} = \left(\lambda \boldsymbol{A}_1, \lambda \boldsymbol{A}_2, \lambda \boldsymbol{A}_3\right)$

şeklinde tanımlıdır. $(\mathfrak{D}^3, \oplus)$ $\mathfrak{D}$ üzerinde bir modüldür.

Tanım.2.1: $\mathfrak{D}^3$ modülünün her elemanına dual vektör denir.

$\mathfrak{D}^3$ ün bir $A = \left(A_1, A_2, A_3\right)$ elemanı reel ve dual olarak şöyle de yazılabilir.

$$A = \left(a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*\right)$$

$$= \left(a_1, a_2, a_3\right) + \varepsilon\left(a_1^*, a_2^*, a_3^*\right)\Big)$$

$$= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \ , \vec{a}\ ,\ \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$$

$\mathfrak{D}^3$ üzerinde dual iç çarpım: $\forall A, B \in \mathfrak{D}^3$

$$< A, B) = \left\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \right\rangle$$

$$= \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \varepsilon(\left\langle a, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overline{a^*, \vec{b}} \right\rangle$$

$$= \vec{c} + \varepsilon \overrightarrow{c^*}$$

Tanımlanan dual iç çarpıma bağlı olarak bir dual vektörün normu tanımı şöyledir.

Tanım 2.2: Bir $A \in \mathfrak{D}^3$ $A = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ için, $\vec{a} \neq 0$ olmak üzere, A nın normu

$$\| A \| = (\| \vec{a} \|, \frac{\left\langle \vec{a}, \overline{a^*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|})$$

olarak belli olan dual sayıdır.

Tanım 2.3: $\| A \| = \left(1, 0\right)$ olan A dual vektörüne birim dual vektör adı verilir.

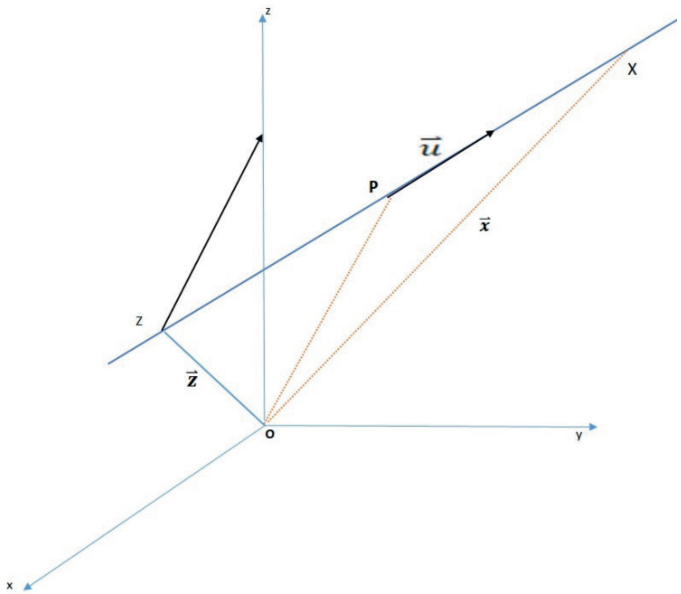
A birim dual vektör ise a nın reel ve dual kısımları için $\| \vec{a} \| = 1$ ve $\left\langle \vec{a}, \overline{a^*} \right\rangle = 0$ dır.

Dual sayılar ve dual vektör için buraya kadar aktarılanlar birim dual küre için gerekli olan bilgilerdi. Study dönüşümü ve ilgili teori için temel olan birim dual küre tanımı ile devam edilecektir.

Tanım 2.4: $\boldsymbol{DS} = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^{*} / \| A \| = (1,0) \right\} \subset \mathfrak{D}^{3}$ cümlesine birim dual küre denir.

Teorem 2.5. Birim dual kürenin noktaları $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlü doğrular ile birebir eşlenir.

İspat: İspat için $\mathbb{R}^3$ deki her yönlü doğrunun bir tek birim dual vektör tanımladığını ve her birim dual vektörün $\mathbb{R}^3$ uzayında bir tek yönlü doğru tanımladığını göstermek yeter.



Şekil 2.1

Şekil 2.1'deki notasyonlarla $\mathbb{R}^3$ deki bir doğrunun vektörel denklemi

$$(\vec{x} - \overline{p}) \times \vec{u} = 0$$

olarak yazılır. Vektörel denklemde $\| \vec{u} \| = 1$ almak genelliği bozmaz.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \overline{u^{*}}$$

vektörüne $\vec{u}$ vektörünün O noktasına göre ***vektörel momenti*** denir. $\overrightarrow{u^*}$ vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır, şöyle ki; doğru üzerinde X den başka bir Y noktası seçilmiş olsaydı,

$$(\vec{y} - \overrightarrow{p}) \times \vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{y} \times \vec{u} - \overrightarrow{p} \times \vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{y} \times \vec{u} = \overrightarrow{p} \times \vec{u} = \overrightarrow{u^*}$$

elde edilir ki bu da iddiayı doğrular. Böylece doğru üzerindeki temsilci nokta olarak X yerine O noktasının doğru üzerindeki dikme ayağı olan Z noktası alınabilir.

$\overrightarrow{u^*} = \overrightarrow{OZ}$ olup $\|\overrightarrow{u^*}\|$ doğrunun O noktasına olan uzaklığıdır ve $\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$ dır. Böylece $(\vec{u}, \overrightarrow{u^*})$ vektör çifti

$$\|\vec{u}\| = 1$$
$$\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$$

özelliklerini gerçekleyen bir vektör çiftidir ve $\vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*}$ dual vektörü için

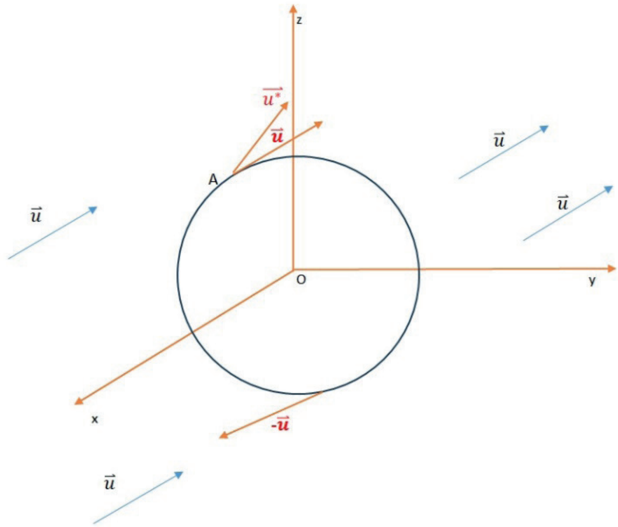
$$\|\vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*}\| = 1$$

dir. Sonuç olarak

$$\vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*} \in \mathfrak{D}^3$$

yani $\mathbb{R}^3$ de bir yönlü doğru verildiğinde tek türlü tanımlı bir $\vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*}$ dual vektörü elde edilir.

İspatın ikinci kısmı: $\vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*} \in DS$ verilsin. $\|\vec{u}\| = 1$ ve $\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$ dır. Şekil 2.1 deki gösterimlerle devam edilecektir.



Şekil 2.2

Orijinden geçen ve $\overrightarrow{u^*}$ vektörüne dik olan düzlem E ile gösterilsin. O merkezli ve $\|\overrightarrow{u^*}\| = r$ yarıçaplı çember çizilsin. Bu çemberin teğet vektörlerinin $\vec{u}$ ve -$\vec{u}$ vektörleri ile çakışığı noktalardaki doğrular, A ve B noktalarından geçen, $\vec{u}$ ve - $\vec{u}$ vektörlerini doğrultman vektörü kabul eden iki doğrudur. $\vec{u}$ vektörünün belirlediği yöne sahip olan doğru $(\vec{u}, \overrightarrow{u^*})$ ikilisi ile belli olan doğrudur.

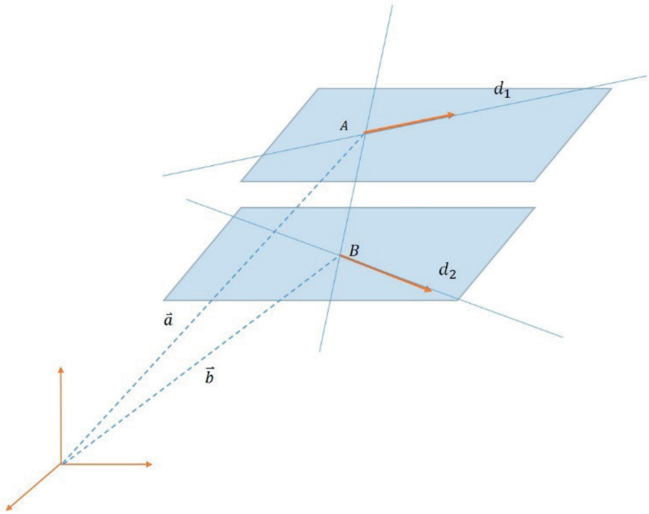
3. SD üzerindeki iç çarpımın yorumu

$\mathfrak{D}^3$ deki iki $D_1 = \vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*}$ ve $D_2 = \vec{v} + \varepsilon \overrightarrow{v^*}$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle D_1, D_2 \rangle = < \vec{u} + \varepsilon \overrightarrow{u^*} \ , \vec{v} + \varepsilon \overrightarrow{v^*} >$$

$$= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \varepsilon (< \vec{u} \ , \overrightarrow{v^*} > + < \overrightarrow{u^*} \ , \vec{v} >)$$

dir. $D_1, D_2 \in DS$ ve D_1 ile belli olan doğru d_1 ve D_2 ile belli olan doğru d_2 olsun. d_1 için doğrultman vektörü $\vec{u}$, vektörel momenti $\overrightarrow{u^*}$, d_2 için doğrultman vektörü $\vec{v}$, vektörel momenti $\overrightarrow{v^*}$ dir. d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikme ayakları A ve B olsun.



Şekil 2.3

$\vec{a}\times\vec{u}=\overrightarrow{u^*}$, $\vec{b}\times\vec{v}=\overrightarrow{v^*}$ dir. $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörü her iki doğruya da diktir ve $\vec{u}\times\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$ olup, d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklık θ^* ise

$$\vec{a}-\vec{b}=\frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\theta^*$$

dır. $\langle D_1, D_2\rangle$ iç çarpımının reel kısmı

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\, cos\,\theta$, $\theta = \acute{y}açı\left(\vec{v},\vec{\ }\right)$

olarak elde edilir. Dual kısım için hesaplama şöyledir:

$$\begin{aligned}
<\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{v^*}> + <\overrightarrow{u^*}\ ,\ \vec{v}> &= \langle \vec{u},\vec{b}\times\vec{v}\rangle + \langle \vec{a}\times\vec{u},\vec{v}\rangle \\
&= \left(\vec{u},\vec{b},\vec{v}\right)+\left(\vec{a},\vec{u},\vec{v}\right) \\
&= \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\theta^* \\
&= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\, sin\theta.\theta^*
\end{aligned}$$

dolayısıyla sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2\rangle &= cos\theta + \varepsilon\, sin\theta.\theta^* \\
&= \cos\left(\theta+\varepsilon\ \theta^*\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\cos\left(\theta+\varepsilon\theta^{*}\right)=\cos\theta.cos\left(\varepsilon\ \theta^{*}\right)-\sin\theta.sin\left(\varepsilon\ \theta^{*}\right)\ (*)$$

Taylor açılımı uygulanırsa,

$$\cos\left(\varepsilon\ \theta^{*}\right)=1-\frac{\varepsilon^{2}\theta^{*2}}{2!}+\frac{\varepsilon^{4}\theta^{*4}}{4!}-\ldots=1$$

$$\sin\left(\varepsilon\theta^{*}\right)=\varepsilon\theta^{*}-\frac{\varepsilon^{3}\theta^{*3}}{2!}+\frac{\varepsilon^{5}\theta^{*5}}{5!}-\ldots=\varepsilon\theta^{*}$$

bu açılımlar (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\cos\left(\theta\mp\varepsilon\theta^{*}\right)=\cos\ \theta\mp\varepsilon\theta^{*}\ sin\theta$$

elde edilir.

$\theta+\varepsilon\theta^{*}$ değerine dual açı denir. θ değeri iki doğru arasındaki açı ve θ^{*} değeri ise iki doğru arasındaki en kısa uzaklıktır.

Kaynaklar

1. Clifford, William Kingdon, Mathematical Papers, , Edited by Robert Tucker, Macmillan and Co., London,1882
2. Snygg, John A New Approach to Differential Geometry Using Clifford's Geometric Algebra, , Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012
3. Study, E., A New Branch of Geometry, "Ein neue Zweig der Geometrie," Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. XI, Heft 3 (1901), 97-123.
4. Guggenheimer, H.W., Differential Geometry. McGraw-Hill, New York, (1963)