

Regresyon Modelinde Heteroskedastisite:EKK'nın Sınırları ve Alternatif Tahminciler

Çetin Görür¹

Özet

Bu çalışmada, ekonometrik analizlerde yaygın olarak kullanılan En Küçük Kareler (EKK) yönteminin teorik temelleri ve varsayımları ele alınmış, özellikle hata terimlerinin sabit varyanslı olması gerektiğini ifade eden homoskedastisite varsayımının ihlali durumunda ortaya çıkan heteroskedastisite sorununun incelenmesi amaçlanmıştır. EKK tahmincisi heteroskedastisite altında sapmasız ve tutarlı kalmasına rağmen etkinliğini kaybetmekte, standart hatalar güvenilirliğini yitirmekte ve hipotez testlerinin geçerliliği zayıflamaktadır. Bu nedenle, heteroskedastisite durumunda alternatif yöntemlerin uygulanması, ekonometrik model güvenilirliği açısından kritik bir gereklilik olarak görülmektedir. Uygulamalı örnekte, EKK tahminleri ihracat ve istihdam değişkenlerinin Gayri Safi Yurtiçi Hasıla üzerinde anlamlı ve pozitif etkilerini ortaya koyarken, tarım alanı ve göç değişkenlerinin etkileri istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır. Breusch–Pagan testi heteroskedastisite varlığını doğrulamış, Ağırlıklandırılmış EKK (AEKK) yöntemi uygulanmış ve ihracat ile istihdam değişkenlerinin güçlü etkisi korunmuş, ancak heteroskedastisite yalnızca kısmen giderilebilmiştir. Bu sonuç, daha esnek bir yöntem olan Genel EKK (GEKK) yöntemine yönelmenin gerekliliğini göstermiştir. GEKK modeli, hata terimlerinin genel varyans–kovaryans yapısını dikkate alarak hem heteroskedastisiteyi hem de olası otokorelasyon problemlerini çözebilmektedir. Uygulama bulguları, GEKK ile modelin açıklama gücünde belirgin bir artış sağlandığını ve heteroskedastisitenin tamamen ortadan kalktığını ortaya koymuştur. Sonuç olarak, heteroskedastisiteye sahip ekonometrik uygulamalarda yalnızca EKK'ya bağlı kalmak yerine AEKK ve GEKK gibi alternatif yöntemlere yönelmek, daha güvenilir ve etkin parametre tahminleri ile ekonometrik çıkarımların sağlamlığını artırmaktadır. Özellikle ihracat ve istihdamın bölgesel ekonomik büyüme üzerindeki belirleyici rolü, tüm yöntemler arasında tutarlı şekilde gözlenmiş, GEKK tahminleri sayesinde bu ilişkiler daha güvenilir biçimde desteklenmiştir.

1 Öğr. Gör. Dr., Van YYÜ, Erciş MYO, ORCID ID: 0000-0002-9556-5068

1. GİRİŞ

Ekonometrik analizlerde doğrusal regresyon modeli, bağımlı değişken ile bir veya birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkinin incelenmesinde en temel araçlardan biridir. Özellikle En Küçük Kareler (EKK) yöntemi, sahip olduğu güçlü teorik özellikler nedeniyle akademik literatürde uzun yıllardır standart bir tahmin yaklaşımı olarak kullanılmaktadır (Greene, 2018; Wooldridge, 2016). Ancak EKK tahmincilerinin geçerliliği ve güvenilirliği, klasik regresyon modeli varsayımlarının sağlanmasına sıkı sıkıya bağlıdır. Bu varsayımlardan herhangi birinin ihlali, elde edilen tahminlerin etkinliğini ve çıkarımların doğruluğunu olumsuz etkileyebilir (Gujarati ve Porter, 2009; Asteriou ve Hall, 2011; İşleyen vd., 2018). Özellikle hata terimlerinin varyansının sabit olmaması (heteroskedastisite) durumunda, EKK tahmincileri sapmasız kalmakla birlikte etkinlik özelliklerini kaybeder ve güvenilirlik zedelenir (White, 1980).

Bu bölümde öncelikle EKK yönteminin matematiksel çerçevesi ve klasik varsayımlar ayrıntılı olarak açıklanacak, ardından heteroskedastisite problemi tanımlanacaktır. Sonrasında bu problemin varlığında kullanılabilecek alternatif yöntemlere genel bir bakış sunulacaktır ve özellikle Ağırlıklı En Küçük Kareler (AEKK) ile Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) yöntemleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.1. EKK Yöntemi

Doğrusal regresyon modeli genel olarak Eşitlik (1)'de görüldüğü şekilde ifade edilmektedir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

matris gösterimi ise aşağıda verildiği şekildedir;

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

burada;

$\mathbf{y}, n \times 1$ boyutunda bağımlı değişkenler vektörünü,

$\mathbf{X}, n \times k$ boyutunda açıklayıcı değişkenler matrisini,

$\boldsymbol{\beta}, k \times 1$ parametreler vektörünü,

$\mathbf{u}, n \times 1$ hata terimleri vektörünü ifade etmektedir (Wooldridge, 2016; Greene, 2018).

EKK yöntemi, hata terimlerinin kareleri toplamını minimize ederek parametre tahminlerini elde eder:

$$\hat{\beta}_{OLS} = \underset{\beta}{argmin} (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

burada en küçükleme problemi çözülerek elde edilen EKK tahmincisi Eşitlik (2)'de ifade edildiği şekildedir:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1} X'y \quad (2)$$

EKK tahmincisi, klasik varsayımlar altında en küçük varyansa sahip lineer sapmasız tahminci (BLUE) olma özelliğini taşır (Greene, 2018; Wooldridge, 2016; Gujarati ve Porter, 2009).

1.2. Klasik Regresyon Modeli Varsayımları

EKK tahmincisinin sapmasız, tutarlı ve etkin olabilmesi için bir dizi varsayımın sağlanması gerekir. Bu varsayımlar literatürde “klasik doğrusal regresyon modeli varsayımları” olarak bilinmektedir (Asteriou ve Hall, 2011; Johnston ve DiNardo, 1997; Altun vd., 2018).

Doğrusallık: Model parametrelerde doğrusaldır.

Rassal örnekleme: Veri rassal olarak elde edilmiştir.

Tam çoklu doğrusal bağlantının olmaması: Açıklayıcı değişkenler arasında tam doğrusal ilişki bulunmamaktadır.

Sıfır beklenen hata: $E(u_i|X) = 0$.

Sabit varyans varlığı: Hata terimlerinin varyansı sabittir, yani;

$$Var(u_i|X) = \sigma^2$$

Otokorelasyon olmaması: Hata terimleri birbiriyle ilişkisizdir.

Normal dağılım (çıkarım için): Hata terimleri normal dağılmıştır.

Bu varsayımlardan özellikle beşinci varsayım (homoskedastisite), modelin etkinliği açısından kritik öneme sahiptir. Varsayım ihlal edildiğinde, EKK tahmincisi sapmasız kalsa bile etkinlik özelliğini kaybeder (Wooldridge, 2016; Greene, 2018; Demir, 2021).

1.3. Değişen Varyans Problemi (Heteroskedastisite)

Homoskedastisite varsayımının ihlal edilmesi durumunda hata terimlerinin varyansı gözlemler arasında farklılık gösterir. Bu durumda:

$$Var(u_i|X) = \sigma_i^2 \neq \sigma^2$$

şeklinde ifade edilen durum heteroskedastisite olarak adlandırılmaktadır (White, 1980; Baltagi, 2008).

Heteroskedastisite varlığında:

EKK tahmincileri sapmasız ve tutarlıdır, ancak etkin değildir, yani varyansları minimum değildir. Bunun sonucu olarak, standart hata tahminleri tutarsız hale gelmekte, güven aralıkları ve hipotez testleri geçerliliğini kaybetmektedir (Demir vd., 2023).

Bu bahsedilenlerin sonucu olarak heteroskedastisite, ekonometrik modellerde çıkarımların güvenilirliği açısından ciddi bir sorun oluşturmaktadır (Gujarati ve Porter, 2009).

1.4. Alternatif Çözüm Yöntemleri

Heteroskedastisiteye karşı literatürde çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlar arasında:

- Ağırlıklı En Küçük Kareler
- Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (Hoechle, 2007),

Bu yöntemler arasında AEKK ve GEKK, doğrudan hata terimlerinin varyans–kovaryans yapısını dikkate alarak tahminleri etkin hale getirmesi bakımından diğerlerinden öne çıkmaktadır (Greene, 2018; Wooldridge, 2016).

1.5. Ağırlıklı En Küçük Kareler (AEKK) Yöntemi

Eğer hata terimlerinin varyansının yapısı bilindiğinde, her bir gözleme varyansının tersiyle orantılı ağırlık verilerek model yeniden tahmin edilebilmektedir. Bu yöntem AEKK olarak bilinir. AEKK modeli genel olarak Eşitlik (3)'teki şekilde ifade edilmektedir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i, \text{Var}(u_i) = \sigma_i^2 \quad (3)$$

burada her gözlem $\frac{1}{\sigma_i}$ ile bölünüp;

$$\frac{y_i}{\sigma_i} = \frac{\beta_0}{\sigma_i} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sigma_i} + \beta_2 \frac{x_{2i}}{\sigma_i} + \dots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i}$$

şeklini alır. Matris gösterimi ise aşağıda yer aldığı şekildedir:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^*$$

burada;

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}$$

$\mathbf{W} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n^2}\right)$ şeklindedir. Böylelikle AEKK tahmincisi

Eşitlik (4)'teki gibi yazılabilmektedir.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{WLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y} \quad (4)$$

AEKK, heteroskedastisiteyi doğrudan gidererek etkin tahminler elde etmeyi sağlar. Ancak pratikte σ_i^2 değerleri genellikle bilinmez. Bu durumda tahmin edilen hata terimleri (artıklar) yardımıyla yaklaşık değerler elde edilir (Feasible AEKK) (Greene, 2018; Johnston ve DiNardo, 1997). Yöntemin avantajları ve dezavantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Yöntemin Avantajlar:

- Etkin tahminler sağlar.
- Standart hatalar güvenilir hale gelir.
- Uygulaması görece kolaydır.

Yöntemin Dezavantajlar:

Gerçek σ_i^2 değerleri bilinmez, tahmin edilmesi gerekir.

Yanlış ağırlık seçimi sonuçları bozabilir (Greene, 2018; Wooldridge, 2016; Johnston ve DiNardo, 1997).

1.6. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK)

Hata terimleri sadece heteroskedastik değil aynı zamanda otokorelasyona da sahip olabilir. Bu durumda hata terimlerinin kovaryans matrisi Eşitlik (5)'te verildiği şekildedir:

$$Var(\mathbf{u}) = \Omega \neq \sigma^2 I \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Ω , hata terimlerinin varyans–kovaryans yapısını içeren pozitif tanımlı bir matristir. GEKK tahmincisi Eşitlik (6)'da verildiği şekilde tanımlanır:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y} \quad (6)$$

GEKK yöntemi, hata terimlerinin korelasyon yapısını dikkate alarak etkin tahminciler elde edilmesini sağlar. Ancak Ω genellikle bilinmez. Bu durumda tahmini bir $\hat{\Omega}$ matrisi kullanılır ve bu FGEKK olarak adlandırılır (Parks, 1967; Greene, 2018). GEKK, hem heteroskedastisite hem de otokorelasyon sorunlarını çözmede oldukça güçlüdür (Baltagi, 2008). Yöntemin avantaj ve dezavantajları aşağıdaki gibidir:

Yöntemin Avantajlar:

- Hem heteroskedastisite hem de otokorelasyon sorunlarını çözebilir.
- Etkin ve güvenilir parametre tahminleri sunar.

Yöntemin Dezavantajlar

Ω 'nın tam biçimi genellikle bilinmez.

Yanlış tahmin edilen Ω etkinliği azaltabilir.

Hesaplama yükü EKK'ya göre daha fazladır (Greene, 2018; Baltagi, 2008; Parks, 1967)

2. UYGULAMALI ÖRNEK

Tablo 1, analizde kullanılan değişkenlere ilişkin tanımları, veri yılı ve veri kaynaklarını içermektedir. Çalışmada bağımlı değişken olarak illerin GSYİH'sı seçilmiş, bağımsız değişkenler ise kullanılan tarım alanı, alınan göç, ihracat ve istihdam şeklinde belirlenmiştir. Değişkenlerin tamamının

TÜİK verilerine dayanması, çalışmanın güvenilirliğini artıran önemli bir unsurdur.

Tablo 1. Çalışmada Kullanılan Değişkenlere İlişkin Bilgiler

Değişkenler	Açıklama	Yıl	Gözlem Sayısı	Kaynak
GSYİH	İllere Göre Gayri Safi Yurtiçi Hâsıla (Bağımlı Değişken, Logaritmik)	2024	81	TÜİK
K_TAR_A	İllere Göre Kullanılan Tarım Alanı (Logaritmik)	2024	81	TÜİK
A_GOC	İllerin Aldığı Göç (Logaritmik)	2024	81	TÜİK
Ihracat	İllerin Yaptığı İhracat (Logaritmik)	2024	81	TÜİK
Istihdam	İllerdeki İstihdam (Oran)	2024	81	TÜİK

Tablo 1, çalışmanın veri setini ortaya koyarken aynı zamanda analiz için seçilen değişkenlerin gerekçelerini de net bir biçimde desteklemektedir. İller düzeyinde seçilen değişkenlerin çeşitliliği, ekonomik büyüme üzerinde farklı kanalların nasıl işlediğini anlamak açısından önemli bir analitik çerçeve sunmaktadır.

Tablo 2, modelde kullanılan değişkenlerin tanımlayıcı istatistiklerini sunarak dağılımları ve merkezî eğilimlerini ortaya koymaktadır.

Tablo 2. Değişkenlere İlişkin Tanımlayıcı İstatistikler

Değişkenler	Ortalama	Medyan	St. Sapma	Min.	Maks.
GSYİH	5.338526	5.331843	0.1449189	5.033509	5.713036
K_TAR_A	6.074564	6.159160	0.5741255	3.300595	7.180812
A_GOC	4.337316	4.256381	0.3509950	3.659916	5.597130
Ihracat	5.105007	5.089463	1.0104273	1.974572	7.734635
Istihdam	48.184037	48.923972	4.9350462	35.257175	60.629570

Tablo 2’de yer alan ortalama, standart sapma, minimum ve maksimum değerler incelendiğinde, değişkenlerin ölçek ve varyasyon düzeylerinin birbirinden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Bağımlı değişken olan GSYİH’nın ortalama değeri etrafında düşük standart sapma göstermesi, iller arasında görece sınırlı farklılık bulunduğunu düşündürmektedir. Tarım alanı değişkeni daha geniş bir dağılım sergileyerek iller arasında belirgin heterojenlik göstermektedir. Bu heterojenliğin, özellikle tarım ağırlıklı iller ile sanayi ve hizmet sektörlerinin baskın olduğu iller arasındaki ekonomik farkları

yansıtması beklenmektedir. Alınan göç değişkeni, daha dar bir varyasyon göstermektedir. Bu sonuç, göçün iller arasında farklılık arz etmesine karşın, GSYİH üzerindeki etkisini doğrudan yakalamamanın güç olabileceğine işaret etmektedir. Buna karşılık ihracat değişkeni yüksek standart sapmasıyla iller arası büyük farklılık göstermekte, bazı illerin ihracat kapasitesinin bölgesel gelir üzerinde belirleyici bir unsur olduğunu ortaya koymaktadır. İstihdam değişkeni ise geniş bir aralık ve yüksek ortalama değer sunarak, bölgesel üretim kapasitesinin temel belirleyicisi olarak öne çıkmaktadır. Tablo 2, veri setinin yapısal özelliklerini net biçimde göstermekte ve ilerleyen analizlerde özellikle ihracat ve istihdam değişkenlerinin güçlü açıklayıcı etkilere sahip olacağına dair ön sinyaller vermektedir.

Tablo 3, Gayri Safi Yurtiçi Hasıla'daki değişimi açıklamak amacıyla kurulan EKK modeline ait regresyon katsayılarını, standart hataları, anlamlılık düzeylerini ve VIF değerlerini sunmaktadır.

Tablo 3. EKK Model Sonuçları ve VIF Değerleri

Değişkenler	Katsayı	St. Hata	t-değeri	P-değeri	VIF değerleri
Sabit	5.338526	0.011441	466.622	<0.001*	-
K_TAR_A	0.008079	0.012370	-0.653	0.5157	1.154654
A_GOC	-0.011694	0.019663	0.595	0.5538	2.917276
Ihracat	0.064762	0.019090	3.392	0.001*	2.749868
Istihdam	0.062022	0.011840	5.238	<0.001*	1.057824
$R^2 = 0.5204$		Düzeltilmiş $R^2 = 0.4952$			

Tablo 3'te modelin R^2 değeri yaklaşık %52 olup, bağımlı değişken varyansının yarısından biraz fazlasının açıklayıcı değişkenler tarafından açıklandığını göstermektedir. Bölgesel düzeyde yapılan ekonometrik analizlerde bu oran orta düzeyde tatmin edici kabul edilmektedir. Elde edilen bulgulara göre, ihracat ve istihdam değişkenleri istatistiksel olarak anlamlı ve pozitif etkiye sahiptir. Bu durum teorik beklentilerle tam bir uyum göstermektedir. İhracatın GSYİH üzerindeki pozitif etkisi, dış talep kanalı yoluyla üretim kapasitesini artırmasından kaynaklanmaktadır. Benzer şekilde istihdamın pozitif ve güçlü etkisi, daha geniş bir işgücünün üretim ve gelir yaratma kapasitesini artırdığını ortaya koymaktadır. Buna karşın tarım alanı ve göç değişkenleri istatistiksel olarak anlamlı değildir. Bu bulgu, tarımın bölgesel GSYİH üzerindeki katkısının sınırlı kaldığını veya göçün niteliksel özelliklerinin modele dahil edilmediğini göstermektedir. VIF değerleri incelendiğinde ise modelde çoklu doğrusal bağlantı sorunu

bulunmadığı görülmektedir. Bu da model katsayılarının istatistiksel güvenilirliğini artıran bir unsurdur. Ancak Breusch–Pagan testi sonucunda modelde heteroskedastisite problemi tespit edilmesi, EKK sonuçlarının standart hatalar açısından güvenilir olmadığını işaret etmektedir. Bu nedenle bir sonraki aşamada AEKK yöntemine geçilmesi metodolojik olarak gerekli hale gelmektedir.

Tablo 4, EKK modelinin hata terimlerine ilişkin normallik ve homoskedastisite varsayımlarının test sonuçlarını göstermektedir.

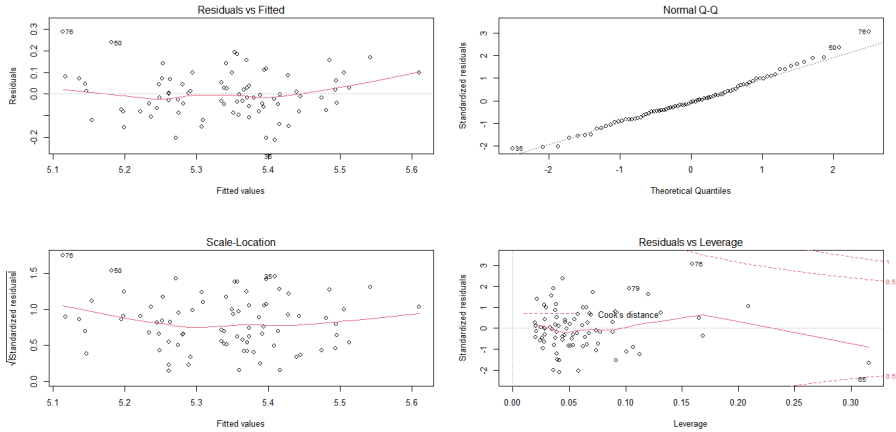
Tablo 4. EKK için Normallik ve Değişen Varyans Test Sonuçları

Normallik Testi (Shapiro-Wilk)		Değişen Varyans (Breusch-Pagan)	
W değeri	p- değeri	BP değeri	p - değeri
0.98842	0.6844	9.588	0.02797

Tablo 4’ te yer alan Shapiro–Wilk testinde p-değerinin 0.05’ten büyük olması, hata terimlerinin normal dağıldığını ve bu açıdan modelin çıkarım yapmaya uygun olduğunu göstermektedir. Ancak Breusch–Pagan testi p-değerinin 0.05’in altında olması, homoskedastisite varsayımının reddedilmesine yol açmaktadır. Bu bulgu, EKK modelinin heteroskedastisite problemine sahip olduğunu ve dolayısıyla standart hataların tutarsız hale geldiğini göstermektedir. Bu nedenle, parametre tahminleri sapmasız olsa da etkinliklerini kaybetmektedir. Böyle bir durumda literatürde önerilen başlıca çözümlerden biri, gözlemlere farklı ağırlıklar atayarak varyans farklılıklarını dengelemeyi sağlayan Ağırlıklı En Küçük Kareler (AEKK) yöntemidir. Dolayısıyla Tablo 4’te elde edilen sonuçlar, çalışmada neden OLS’den AEKK’ya geçildiğini metodolojik açıdan açıkça gerekçelendirmektedir.

Şekil 1'de yer alan EKK varsayımlarına ilişkin tanısal grafikler dört panel halinde verilmiştir.

Şekil 1. EKK Varsayımları için Tanısal Grafikler



Şekil 1'de yer alan tanısal grafikler birlikte değerlendirildiğinde, öncelikle “residuals vs fitted” grafiğinde hata terimlerinin rastgele dağılmadığı, tahmin edilen değerler arttıkça artıkların varyansının genişlediği ve bu durumun heteroskedastisite olasılığını işaret ettiği görülmektedir. Normal Q-Q grafiği incelendiğinde, noktalar teorik çizgi etrafında yoğunlaşmakla birlikte uç değerlerde sapmalar mevcuttur; bu bulgu hata terimlerinin merkezde normal dağılıma yakın olduğunu ancak uçlarda normallikten uzaklaştığını göstermektedir. Scale-Location grafiğinde standartlaştırılmış artıkların karekökünün tahmin değerlerine göre homojen dağılmadığı ve varyansın özellikle düşük ve yüksek değerlerde artış gösterdiği gözlenmektedir ki bu da homoskedastisite varsayımının tam olarak sağlanmadığını teyit etmektedir. Son olarak “residuals vs leverage” grafiğinde özellikle 50, 70 ve 79 numaralı gözlemlerin Cook's mesafesi sınırına yakın konumlandığı ve model üzerinde orantısız bir etkiye sahip olabileceği dikkat çekmektedir. Tüm bu bulgular, hata terimlerinin büyük ölçüde normal dağılmasına rağmen heteroskedastisitenin varlığına ve bazı gözlemlerin yüksek kaldıraç etkisiyle model sonuçlarını bozma ihtimaline işaret etmektedir. Böylelikle, EKK tahmincilerinin etkinliği sınırlanmakta ve daha güvenilir sonuçlar için AEKK ya da GEKK gibi alternatif yöntemlerin tercih edilmesi gerekmektedir.

Tablo 5, heteroskedastisite problemini gidermek amacıyla uygulanan AEKK yöntemine ait sonuçları sunmaktadır.

Tablo 5. AEKK Model Sonuçları

Değişkenler	Katsayı	St. Hata	t-değeri	P-değeri
Sabit	5.339229	0.011561	461.8334	<0.001*
K_TAR_A	0.010859	0.015449	-0.7029	0.48426
A_GOC	-0.014858	0.023693	0.6271	0.53247
Ihracat	0.062007	0.023814	2.6038	0.011*
Istihdam	0.065145	0.010615	6.1372	<0.001*
$R^2 = 0.516783$		Düzeltilmiş $R^2 = 0.4913505$		

Tablo 5'te modelin R^2 değeri yaklaşık %51 olup EKK modeline yakın bir düzeydedir. Ancak AEKK'nın temel amacı uyum katsayısını artırmaktan ziyade parametre tahminlerini etkin hale getirmektir. Sonuçlar incelendiğinde, ihracat ve istihdam değişkenleri yine pozitif ve istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Bu bulgu, söz konusu değişkenlerin GSYİH üzerindeki belirleyici rolünün heteroskedastisiteden bağımsız olarak tutarlı biçimde ortaya çıktığını göstermektedir. Buna karşılık tarım alanı ve göç değişkenleri EKK'da olduğu gibi yine anlamsızdır. AEKK, bu iki değişkenin etkisini değiştirmemiş, yalnızca tahmin edilen katsayıları bir miktar farklılaştırmıştır. AEKK sonucunda elde edilen Breusch-Pagan test değeri, heteroskedastisitenin azaldığını ancak tamamen ortadan kalkmadığını göstermektedir. Bu bulgu, AEKK'nın uygulamada iyileştirme sağladığını ancak hata terimlerinin yapısının daha karmaşık olabileceğini işaret etmektedir. Tablo 6'da, AEKK sonrası hata terimlerinin dağılımını değerlendirilmektedir.

Tablo 6. AEKK için Normallik ve Değişen Varyans Varsayımı

Normallik Testi (Shapiro-Wilk)		Değişen Varyans (Breusch-Pagan)	
W değeri	p- değeri	BP değeri	p - değeri
0.98904	0.7263	7.554	0.04107

Tablo 6'da yer alan Shapiro-Wilk testi modelin hata terimlerinin normal dağılım varsayımını sağladığını doğrulamaktadır. Ancak Breusch-Pagan testi sonuçları, heteroskedastisitenin tamamen giderilemediğini göstermektedir. Bu durum, ağırlıklandırmanın hata varyansını belirli ölçüde düzelttiğini ancak yapısal farklılıkların tümünü ortadan kaldıramadığını göstermektedir.

Bu sonuç, çalışmada neden AEKK sonrasında GEKK yöntemine geçildiğini açıklayan önemli bir gerekçedir. Çünkü GEKK, yalnızca heteroskedastisiteyi değil, hata terimleri arasındaki daha genel varyans–kovaryans yapısını da dikkate alarak etkin tahminler yapılmasına olanak tanımaktadır.

Dolayısıyla bu aşamada, daha geniş bir değişen varyans örüntüsünü dikkate alan bir yöntem olan GLS'in uygulanması ile analize devam etmenin uygun olacağı düşünülmektedir. Tablo 7, GEKK yönteminin sonuçlarını sunmaktadır.

Tablo 7. GEKK Model Sonuçları

Değişkenler	Katsayı	St. Hata	t-değeri	P-değeri
Sabit	5. 336700	0.011479	464.8964	<0.001*
K_TAR_A	0. 003486	0.011606	-0.3004	0.763891
A_GOC	-0. 022731	0.018518	1.2275	0.219631
Ihracat	0. 066563	0.020252	3.2868	0.001*
Istihdam	0. 065653	0.012268	5.3515	<0.001*
$R^2 = 0.6275347$		Düzeltilmiş $R^2 = 0.5614039$		

Tablo 7'de modelin R^2 değeri %62 düzeyine çıkmış, düzeltilmiş R^2 ise %56 olarak gerçekleşmiştir. EKK ve AEKK'ya kıyasla bu değerlerdeki artış, GEKK'nın hata terimleri arasındaki yapıyı daha etkin biçimde modellediğini ve dolayısıyla daha güvenilir sonuçlar sağladığını göstermektedir. GEKK bulgularına göre ihracat ve istihdam değişkenleri pozitif ve güçlü biçimde anlamlı kalmıştır. Bu sonuç, söz konusu iki değişkenin bölgesel ekonomik büyüme üzerindeki rolünün son derece sağlam olduğunu ortaya koymaktadır. Tarım alanı ve göç değişkenleri ise yine anlamlı bulunmamıştır. Bu durum, özellikle göç değişkeninin niteliğinin modele yansıtılmadığını ve tarımın bölgesel GSYİH üzerindeki katkısının sınırlı olduğunu göstermektedir. Bu noktada GEKK'nın en önemli katkısı, parametre tahminlerini yalnızca sapmasız değil aynı zamanda etkin hale getirmesidir. Elde edilen sonuçlar, özellikle ihracat ve istihdam değişkenlerinin güvenilirliğini artırarak, politika çıkarımları açısından daha sağlam bir temel sunmaktadır.

Tablo 8, GEKK yöntemine ilişkin varsayım testlerini içermektedir.

Tablo 8. GEKK için Normallik ve Değişen Varyans Varsayımı

Normallik Testi (Shapiro-Wilk)		Değişen Varyans (Breusch-Pagan)	
W değeri	p- değeri	BP değeri	p - değeri
0.98578	0.5126	0.057253	0.8109

Tablo 8’de yer alan Shapiro–Wilk testi hata terimlerinin normal dağıldığını doğrularken, Breusch–Pagan testi p-değerinin 0.81 gibi oldukça yüksek bir düzeyde olması, heteroskedastisitenin artık mevcut olmadığını göstermektedir. Bu bulgu, GEKK yönteminin heteroskedastisite problemini başarıyla ortadan kaldırdığını kanıtlamaktadır. Böylece elde edilen parametre tahminleri etkin ve güvenilir hale gelmiştir. Bu aşamada elde edilen sonuçlar, EKK ve AEKK modellerine kıyasla daha sağlam kabul edilmeli ve çıkarımlar GEKK bulguları üzerinden yapılmalıdır.

SONUÇ

Bu çalışmada, ekonometrik analizlerde yaygın olarak kullanılan EKK yönteminin teorik temelleri ve varsayımları incelenmiş, özellikle hata terimlerinin sabit varyanslı olması gerektiğini ifade eden homoskedastisite varsayımının ihlal edilmesi durumunda karşılaşılan heteroskedastisite sorunu ele alınmıştır. EKK tahmincisinin heteroskedastisite altında sapmasız ve tutarlı kalmasına karşın etkinliğini kaybetmesi, standart hataların güvenilir olmamasına ve dolayısıyla hipotez testlerinin geçerliliğinin zayıflamasına yol açmaktadır. Bu nedenle, heteroskedastisite durumunda alternatif yöntemlerin tercih edilmesi, ekonometrik modellerin güvenilirliği açısından kritik bir gereklilik haline gelmektedir.

Uygulamalı örnekte elde edilen bulgular, EKK tahminlerinin ihracat ve istihdam değişkenlerinin Gayri Safi Yurtiçi Hasıla üzerinde anlamlı ve pozitif bir etkisi olduğunu ortaya koyarken, tarım alanı ve göç değişkenlerinin istatistiksel olarak anlamlı bir katkı sunmadığını göstermiştir. Ancak Breusch–Pagan testi sonuçları, EKK modelinde heteroskedastisite probleminin varlığını ortaya koymuş ve bu nedenle EKK tahminlerinin etkinliği sorgulanır hale gelmiştir. Bu noktada literatürde önerilen başlıca çözüm yollarından biri olan AEKK yöntemi uygulanmıştır. AEKK sonuçları, ihracat ve istihdam değişkenlerinin güçlü etkisini koruduğunu, ancak heteroskedastisite probleminin yalnızca kısmen giderilebildiğini göstermiştir. Bu durum, heteroskedastisitenin daha karmaşık bir yapıya sahip olduğunu ve AEKK’nın sınırlı düzeltme gücü sunduğunu ortaya koymuştur.

Bu bulgu, daha esnek ve güçlü bir yöntem olan GEKK yöntemine yönelmenin gerekçesini oluşturmuştur. GEKK modeli, hata terimlerinin genel varyans–kovaryans yapısını dikkate alarak hem heteroskedastisiteyi hem de olası otokorelasyon sorunlarını çözme kapasitesine sahiptir. Uygulama sonuçları da bu teorik beklentiyi desteklemiş, GEKK modeli ile hem modelin açıklama gücünde (R^2 ve düzeltilmiş R^2) belirgin bir artış sağlanmış hem de heteroskedastisite tamamen ortadan kaldırılmıştır. Bu sonuç, GEKK yönteminin parametre tahminlerini yalnızca sapmasız değil aynı zamanda etkin hale getirdiğini ve ekonometrik çıkarımları daha güvenilir bir zemine taşıdığını göstermektedir.

Sonuç olarak, çalışmada elde edilen bulgular, ekonometrik analizlerde EKK yönteminin güçlü bir başlangıç noktası olmakla birlikte, heteroskedastisite varlığında tek başına yeterli olmadığını ortaya koymaktadır. Bu durumda AEKK yöntemi ilk düzeltici adım olarak uygulanabilse de, yapısal varyans farklılıklarının daha kapsamlı biçimde giderilebilmesi için GEKK yöntemine yönelmek daha sağlam sonuçlar sunmaktadır. Özellikle ihracat ve istihdam değişkenlerinin bölgesel ekonomik büyüme üzerindeki belirleyici rolü, EKK, AEKK ve GEKK modelleri arasında tutarlı biçimde ortaya çıkmış, ancak GEKK tahminleri sayesinde bu ilişkiler daha güvenilir ve etkin parametrelerle desteklenmiştir. Bu nedenle, değişen varyans problemine sahip ekonometrik uygulamalarda, yalnızca EKK'ya dayalı sonuçlara bağlı kalmak yerine, alternatif yöntemlere yönelmenin hem akademik hem de muhataplar açısından daha sağlam çıkarımlar sağlayacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Kaynakça

- Altun, Y., İşleyen, Ş. ve Görür, Ç. (2018). Türkiye’de eğitim ve sağlık harcamalarının ekonomik büyümeye etkisi: 1999-2017. *Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi/The Journal of Social Sciences Institute*, 39, 223-244.
- Asteriou, D. ve Hall, S. G. (2011). *Applied econometrics (2nd ed.)*. Palgrave Macmillan.
- Baltagi, B. H. (2008). *Econometric analysis of panel Data (4th ed.)*. Wiley.
- Demir, Y. (2021). Eğitim, sağlık ve ar-ge harcamaları ile ekonomik büyüme arasındaki ilişkinin ardl sınır testi ile belirlenmesi. *Manas Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 10(3), 1758-1770.
- Demir, Y., İşleyen, Ş. ve Özen, K. (2023). Determining the effect of selected energy consumptions on carbon dioxide emissions by ardl limit test. *Van Yüzüncü Yıl University the Journal of Social Sciences Institute*, 59, 80 – 107.
- Greene, W. H. (2018). *Econometric analysis (8th ed.)*. Pearson.
- Gujarati, D. N. ve Porter, D. C. (2009). *Basic econometrics (5th ed.)*. McGraw-Hill.
- Hoechle, D. (2007). Robust standard errors for panel regressions with cross-sectional dependence. *Stata Journal*, 7(3), 281–312.
- İşleyen, Ş., Altun, Y. ve Görür, Ç. (2018). Hizmet ihracatı ve turizm harcamalarının ekonomik büyümeye katkısı üzerine ampirik bir analiz: 1996-2017 Türkiye örneği. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 6(6) 953–960
- Johnston, J. ve DiNardo, J. (1997). *Econometric methods (4th ed.)*. McGraw-Hill.
- Parks, R. W. (1967). Efficient estimation of a system of regression equations when disturbances are both serially and contemporaneously correlated. *Journal of the American Statistical Association*, 62(318), 500–509.
- White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4), 817–838.
- Wooldridge, J. M. (2016). *Introductory econometrics: A modern approach (6th ed.)*. Cengage Learning.