

Özel Fonksiyonlar

Yazar / Editör:
Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ

$$\begin{aligned} (a+b) &= (b+a) \\ x &= \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \\ x &= \sqrt[3]{x+3} \\ x &= \sqrt[3]{92} \\ \frac{9 \times 6}{3} &= \frac{9}{3} \times \frac{6}{3} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ U &= \pi \times d = 2 \times \pi \times r \\ F &= \pi \times r^2 \\ \pi &= 3,1415926 \\ \pi &= c/d \\ \frac{P_0}{9_0} &= [3] = \frac{3}{1} \end{aligned}$$



Özel Fonksiyonlar

Yazar / Editör:
Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ



Published by

Özgür Yayın-Dağıtım Co. Ltd.

Certificate Number: 45503

📍 15 Temmuz Mah. 148136. Sk. No: 9 Şehitkamil/Gaziantep

☎ +90.850 260 09 97

📞 +90.532 289 82 15

🌐 www.ozguryayinlari.com

✉ info@ozguryayinlari.com

Özel Fonksiyonlar

Yazar / Editör: Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Language: Turkish

Publication Date: 2025

Cover design by Mehmet Çakır

Cover design and image licensed under CC BY-NC 4.0 Print
and digital versions typeset by Çizgi Medya Co. Ltd.

ISBN (PDF): 978-625-5757-77-7

DOI: <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub955>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0). To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. This license allows for copying any part of the work for personal use, not commercial use, providing author attribution is clearly stated.

Suggested citation:

Gürbüz, F. (2025). *Özel Fonksiyonlar*. Özgür Publications.

DOI: <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub955>. License: CC-BY-NC 4.0

The full text of this book has been peer-reviewed to ensure high academic standards. For full review policies, see <https://www.ozguryayinlari.com/>



Ön Söz

Matematiksel analizden fiziksel modellere, mühendislik uygulamalarından istatistiksel yöntemlere kadar pek çok alanda karşılaşılan problemlerin çözümü, çoğu zaman klasik fonksiyonların sınırlarını aşan daha gelişmiş araçlara ihtiyaç duyar. Özel fonksiyonlar olarak adlandırılan bu fonksiyonlar; Gamma, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonları gibi zengin bir yapıyı içeren, hem teorik hem de uygulamalı matematiğin temel yapı taşları haline gelmiş yapılardır.

Bu çalışma, özel fonksiyonların doğuşunu, temel özelliklerini, analitik davranışlarını ve uygulamalarını sistemli bir biçimde ele almayı amaçlamaktadır. Amaç yalnızca bu fonksiyonların tanımlarını vermek değil; aynı zamanda ortaya çıktıkları diferansiyel denklemleri, taşıdıkları simetrileri, serisel çözümlerini ve integral temsillerini ayrıntılı biçimde inceleyerek okuyucuya bütüncül bir bakış açısı sunmaktır.

Özel fonksiyonların tarihsel gelişimi, matematiksel düşüncenin evrimi ile paralellik gösterir. Bu fonksiyonlar, ilk olarak fiziksel sistemlerin modellenmesi sırasında ortaya çıkmış; daha sonra soyut matematiksel yapılar ile ilişkilendirilmiş ve günümüzde sayısal analiz, kesirli analiz, kuantum mekaniği, olasılık teorisi ve sinyal işleme gibi pek çok alanda vazgeçilmez hale gelmiştir. Dolayısıyla, bu çalışmanın hedefi, hem teorik altyapıyı güçlendirmek isteyen öğrencilere hem de uygulamalarında özel fonksiyonlardan yararlanan araştırmacılara güvenilir bir kaynak sunmaktır.

Bu eserin ortaya çıkmasında katkı sağlayan tüm hocalarıma, meslektaşlarıma ve bana ilham veren bilim insanlarına teşekkür ederim. Matematiğin derinliklerini anlamaya çalışan herkes için bu çalışmanın faydalı bir rehber olmasını diliyorum.

Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Kırklareli Üniversitesi

İthaf

Bu kitabı, yaşamımın en büyük dayanağı olan iki değerli insana adıyorum...

Bir hastalığın sessiz gölgesinde aramızdan ayrılan sevgili babama; bana doğruluğu, sabrı ve onurun ne olduğunu öğreten, varlığıyla her zaman yolumu aydınlatan insan...

Ve bir trafik kazasının acımasızlığıyla bizden koparılan kıymetli abime; çocukluğumun kahramanına, dostluğun ve kardeşliğin en sıcak halini bana yaşatan ruha...

Her satırda sizin iziniz, her adımda öğrettikleriniz var.

Bu eser, kalbimde taşıdığım özlemin ve minnetin sessiz bir armağanıdır.

Ruhunuz şad olsun...

İçindekiler

Ön Söz.....	iii
1 ÖZEL FONKSİYONLAR.....	3
1.1 Gamma Fonksiyonu:	3
1.2 Beta Fonksiyonu:	15
1.3 Beta-Gamma Fonksiyonlar Arasındaki İlişki:	16
1.4 Gamma Fonksiyonun Uygulaması:	26
1.5 Hipergeometrik Fonksiyonlar:	34
1.6 Mittag-Leffler Fonksiyonu:	39
1.7 Laplace Dönüşümü	46

ÖZEL FONKSİYONLAR

Matematiksel fizikte ve matematiğin farklı bölümlerinde belirli bir kullanımı olan herhangi bir fonksiyona özel fonksiyon denir. Bu, fizikçilerin ve matematikçilerin matematiksel fiziğin temel diferansiyel denklemlerinden çıkış yolu aradığı 18. yüzyıla kadar uzanan dikkat çekici bir tarihsel alandır. Alanın muazzam bir şekilde geliştiği zamandan beri, günümüzde birçok matematikçi bu alana önemli katkılarda bulunmaktadır. Özel fonksiyonların, kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli diferansiyel denklemler tarafından yönetilen başlangıç ve sınır değerlendirme problemlerinin açıklığa kavuşturulması için çok uygun olduğu bulunmuştur. Özel fonksiyonların matematiğin diğer alanlarında da kapsamlı uygulamaları vardır ve özel fonksiyonlara ilişkin yeni algılar sıklıkla bu etkilerden ilham alır. Son zamanlarda çok sayıda özel fonksiyon tanımlanmıştır. Özel fonksiyonlar kesirli analizde çok önemli ve dikkat çekici bir rol oynar. Bu bölümde Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve Mittag-Leffler fonksiyonu gibi özel fonksiyonları inceliyoruz. Bu fonksiyonlar, keyfi mertebeden diferansiyelleme kavramında ve kesirli diferansiyel denklemlerin felsefesinde önemli bir yer tutar.

1.1 Gamma Fonksiyonu:

Bir doğal sayı olan n nin faktöriyel, n den küçük ve ona eşit tüm doğal sayıların çarpımıdır, yani $n! = n(n-1)\dots 1$ dir. Bunu $\Gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olarak yazabiliriz. Buna faktöriyel fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonu, 1729 yılında Euler tarafından faktöriyelin etki alanını reel sayılar kümesine genişletme girişimiyle ortaya atıldı. Euler, Gamma fonksiyonunun sonraki biçimlerini aşağıdaki gibi sundu.

1. Çarpım Tanımı:

$$\Gamma(x+1) = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{r})^x}{1 + \frac{x}{r}}.$$

2. İntegral Tanımı:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 (-\log t)^x dt, \quad x > 0.$$

19. yüzyılda Gauss, Euler'ın çarpım tanımını, limit işlemiyle fonksiyon serilerini kullanarak aşağıdaki gibi karmaşık sayılara genişletti.

$$\Gamma(z+1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r! r^{z+1}}{(1+z)(2+z) \dots (r+z+1)},$$

burada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Öte yandan Legendre [1], integral tanımının etki alanını aşağıdaki gibi karmaşık sayılara genişletti.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Bu da

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

demektir. Bu integral, sıklıkla Euler integrali olarak da adlandırılır. z üzerindeki kısıtlama, integralin $t = 0$ da ıraksamasını önlemek için gereklidir. Gama fonksiyonu fiziksel problemlerde ortaya çıktığında, genellikle bu formda veya

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \Re(z) > 0$$

veya

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right]^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.2}$$

gibi bir varyasyonda olur.

Örneğin, Euler integrali faktöriyelleri interpolate eder. Yani, $r > 0$ olmak üzere $z = r + 1$ pozitif tam sayı argümanı için Euler integrali, faktöriyelleri

verir. Kısmi integrasyonu durmadan kullanarak

$$\begin{aligned}
\Gamma(r+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^r dt = (-t^r e^{-t})_0^{\infty} + r \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt \\
&= r \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt \\
&= r \left[(-t^{r-1} e^{-t})_0^{\infty} + (r-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-2} dt \right] \\
&= r(r-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-2} dt = \dots = r!
\end{aligned}$$

i buluruz. Çünkü $\int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ dir. Dolayısıyla, Euler integrali faktöriyelleri de interpolate eder.

$z = \frac{1}{2}$ olduğunda, (1.2) Gauss error integralini içerir ve ilginç bir sonuç olan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.3)$$

ye ulaşırız. Gerçekten, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri,

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
&= 4 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi \\
&= \left(-\pi e^{-\rho^2}\right)_0^{\infty} = \pi
\end{aligned}$$

integrallerinin çarpımında düzlemsel kutupsal koordinatları ($x^2+y^2 = \rho^2 dx dy = \rho d\rho d\varphi$) tanıtarak $z = \frac{1}{2}$ için (1.2) nın karesinden doğrudan türetilir.

Ayrıca, $\forall r > 0$ için parça parça integral aldığımızda

$$\begin{aligned}
 \Gamma(r+1) &= \int_0^{\infty} x^r e^{-x} dx \\
 &= - \int_0^{\infty} x^r d(e^{-x}) \\
 &= (-x^r e^{-x})_0^{\infty} + r \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \\
 &= r \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \\
 &= r \Gamma(r)
 \end{aligned}$$

olur ve bu sonucu kullanarak $n = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n+1) &= n! \Gamma(1) \\
 &= n! \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\
 &= n!
 \end{aligned}$$

olduğunu görüyoruz.

Uyarı 1.1 *Gamma fonksiyonunun adı ve Γ gösterimi, 1814 yılında Legendre [1] tarafından ortaya atılmıştır.*

Bu bölümde ve başka yerlerde z reel veya karmaşık olabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}{(1+z)(2+z) \cdots (r+z+1)} r^{z+1} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^z}{r+z+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}{z(1+z)(2+z) \cdots (r+z)} r^z \\
 &= z \Gamma(z)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

elde edilir. Burada,

$$\Gamma(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}{z(1+z)(2+z) \cdots (r+z)} r^z, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \tag{1.5}$$

dir.

Bu durum, gama fonksiyonu için temel fonksiyonel ilişkidir. Bunun bir fark denklemi olduğu unutulmamalıdır. Gama fonksiyonu, rasyonel katsayılı herhangi bir diferansiyel denklemi sağlamayan genel bir fonksiyon sınıfından biridir. Daha spesifik olarak, gama fonksiyonu, matematiksel fiziğin fizikte yaygın olan adi diferansiyel denklemlerin hiçbirini sağlamayan çok az fonksiyonundan biridir. Aslında, herhangi bir kullanışlı veya pratik diferansiyel denklemi sağlamaz.

Ayrıca, tanımdan

$$\Gamma(1) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r (r+1)} r = 1$$

olur. Ayrıca, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{r+1}\right)^z = 1$ olduğundan, (1.5)

$$\Gamma(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r! (r+1)^z}{z(1+z)(2+z) \cdots (r+z)}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{r+1}{r} \cdot \frac{r}{r-1} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = r+1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z} \cdot \frac{2}{2+z} \cdots \frac{r}{r+z} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^z \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^z \cdots \left(\frac{r+1}{r}\right)^z \right] \\ &= \frac{1}{z} \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{r=1}^R \left(\frac{r}{r+z}\right) \left(\frac{r+1}{r}\right)^z \end{aligned} \quad (1.6)$$

elde edilir.

Şimdi, Denklem (1.4)'nin uygulanması

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2, \\ \Gamma(n) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)! \end{aligned}$$

yi verir. Burada, Gama fonksiyonunun, faktöriyelleri tam sayı argümanlarında döndüren sürekli bir fonksiyonla interpolate ettiğini görüyoruz.

Önerme 1.1 *Gamma fonksiyonunun çarpım tanımı (1.5) ile integral tanımı (1.1) eşdeğerdir.*

İspat. (1.5) ile (1.1)' in eşdeğerliğini göstermek için r 'nin pozitif bir tam sayı olduğu iki değişkenli

$$F(z, r) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{r}\right)^r t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{r}\right)^r = e^{-t}$$

olduğundan ve üstel fonksiyonun tanımından (1.1)'e göre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(z, r) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z)$$

elde edilir.

Şimdi de $F(z, r)$ 'yi ardışık kısmi kısmi integrallerde değerlendirelim. Kolaylık olması açısından $u = \frac{t}{r}$ olsun. Bu durumda,

$$F(z, r) = r^2 \int_0^1 (1 - u)^r u^{z-1} du$$

olur. Burada, parça parça integral alarak $\Re(z) > 0$ için

$$\frac{F(z, r)}{r^2} = \left[(1 - u)^n \frac{u^z}{z} \right]_0^1 + \frac{r}{z} \int_0^n (1 - u)^{r-1} u^z du$$

elde edilir. Bunu tekrarlayarak, integral parçanın her iki uç noktada da kaybolmasıyla, sonunda

$$\begin{aligned} F(z, r) &= r^z \frac{r(r-1) \cdots 1}{z(z+1) \cdots (z+r-1)} \int_0^1 u^{z+r-1} du \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}{z(1+z)(2+z) \cdots (r+z)} r^z \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Bu eşitlik (1.5)'in sağ tarafındaki ifadeyle aynıdır. Dolayısıyla, (1.5)'e göre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(z, r) = F(z, \infty) \equiv \Gamma(z)$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

(1.4)'yi kullanarak $\Gamma(z)$ 'yi pozitif argümanlardan negatif argümanlara genişletebiliriz. Örneğin, (1.4)'den başlayarak

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

yi tanımlarız ve (1.4), $z \rightarrow 0$ için $\Gamma(z \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ anlamına gelir. Dahası, $z \rightarrow 0$ için $z\Gamma(z) \rightarrow 1$ [(1.4)], $\Gamma(z)$ 'nin orijinde basit bir kutba sahip olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $\Gamma(z)$ 'nin tüm negatif tam sayılarda basit kutuplarını buluruz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, \\ \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}, \\ \Gamma(0) &= \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{\int_0^\infty e^{-x} dx}{0} = \frac{\lim_{r \rightarrow \infty} (-|e^{-x}|)_0^r}{0} = \frac{1}{0} = \infty, \\ \Gamma(-1) &= \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.1 a , $f(z)$ 'nin basit bir kutbu ise, fonksiyonun rezidüsü

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 1.1 Gamma fonksiyonu, $z = -q$ 'daki basit kutuplar hariç tüm karmaşık düzlemde analitiktir; burada q negatif olmayan bir tam sayıdır.

İspat. Yukarıdaki Teorem 1.1'den,

$$\begin{aligned}\text{Res}\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -q} (z + q) \Gamma(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -q} \frac{(z + q)(z + q - 1) \dots (z + 1)(z) \Gamma(z)}{(z + q - 1) \dots (z + 1)(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -q} \frac{\Gamma(z + q + 1)}{(z + q - 1) \dots (z + 1)(z)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-q)(-q + 1) \dots (-2)(-1)}\end{aligned}$$

olur. ■

Teorem 1.2 $0 < z < 1$ için

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (1.7)$$

dir.

İspat. (1.4) ve (1.6) dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} &= \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} \\ &= \frac{1}{-z} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{z(1+\frac{z}{r})(-z)(1-\frac{z}{n})}{(1+\frac{1}{r})^z(1+\frac{1}{r})^{-z}} \\ &= z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Euler-Wallis formülüne göre (bakınız:[2])

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

olduğundan istenen sonuç doğrudan elde edilmiş olur. ■

Örnek 1.1 $(\frac{3}{2})!$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm 1.1

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right), \quad z! = \Gamma(z+1) \\ &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned} \quad (1.8)$$

bulunur.

Örnek 1.2 $\int_0^{\infty} z^6 e^{-2z} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.2 $2z = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t} dt &= \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} t^6 e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{45}{8} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.3

$$\int_0^1 z^m (\ln z)^n dz = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{(n+1)}}$$

olduğunu gösteriniz, burada $n \in \mathbb{N}$, $m > -1$ dir.

Çözüm 1.3

$$\begin{aligned} z &= e^{-t} \implies dz = -e^{-t} dt, z^m = e^{-mt}, \ln z = -t, \\ z &= 0 \implies t = \infty, z = 1 \implies t = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^m (\ln z)^n dz &= -(-1)^n \int_{\infty}^0 t^n e^{-(m+1)t} dt \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-(m+1)t} dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$(m+1)t = u \implies t = \frac{u}{m+1}, dt = \frac{du}{m+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^m (\ln z)^n dz &= (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{m+1}\right)^n e^{-u} \frac{du}{m+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u} du, \quad (n = k-1) \\
&= \frac{(-1)^n \Gamma(k)}{(m+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}, \quad (k = n+1) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad \Gamma(n+1) = n!
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.4 $\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \infty$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.4 $\beta > 0$ ise

$$\begin{aligned}
\Gamma(\beta) &> \int_0^1 e^{-t} t^{\beta-1} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{1}{e} t^{\beta-1} dt \\
&= \frac{1}{e} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 t^{\beta-1} dt \\
&= \frac{1}{e\beta} \\
&\implies \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \Gamma(\beta) \geq \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{e\beta} = \infty \\
&\implies \lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \infty
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.5 $\int_0^\infty \sqrt{z} e^{-z^3} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.5

$$\begin{aligned}
z^3 &= x \implies dz = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \\
&\implies \int_0^\infty \sqrt{z} e^{-z^3} dz = \frac{1}{3} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.6

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{(z^2 + \frac{1}{2})^2} dz$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.6

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{(z^2 + \frac{1}{2})^2} dz \\
&= \int_0^{\infty} e^{-z^2} \left(\frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} u e^{-(z^2 + \frac{1}{2})u} du \right) dz, \left(\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-au} du \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u e^{-z^2} \cdot e^{-(z^2 + \frac{1}{2})u} du dz \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u e^{-\frac{u}{2}} e^{-(1+u)z^2} du dz \\
&= \int_0^{\infty} u e^{-\frac{u}{2}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(1+u)z^2} dz \right) du \\
&= \int_0^{\infty} u e^{-\frac{u}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1+u}} \right) du, \left(\int_0^{\infty} e^{-az^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \frac{u e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{1+u}} du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{\infty} \frac{(x^2 - 1) e^{-\frac{(x^2-1)}{2}}}{x} 2x dx, x = \sqrt{u+1} \\
&= \sqrt{\pi} e \int_1^{\infty} (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\pi e} \left[\left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right)_1^\infty + \int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \\
&= \sqrt{\pi e} \cdot \sqrt{\frac{1}{e}} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.7

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.7

$$\begin{aligned}
\Gamma(3z) &= (3z-1)! \\
&= \frac{(3z)!}{3z} \\
&= \frac{1}{3z} \prod_{k=0}^{z-1} (3z+1)(3z+2)(3z+3) \\
&= \frac{1}{3z} \left(\prod_{k=0}^{z-1} (3z+1) \right) \left(\prod_{k=0}^{z-1} (3z+2) \right) \left(\prod_{k=0}^{z-1} (3z+3) \right) \\
&= \frac{1}{3z} 3^z \prod_{k=0}^{z-1} \left(z + \frac{1}{3} \right) \left(3^z \prod_{k=0}^{z-1} \left(z + \frac{2}{3} \right) \right) \left(3^z \prod_{k=0}^{z-1} (z+1) \right) \\
&= \frac{3^{3z}}{3z} \prod_{k=0}^{z-1} \left(z + \frac{1}{3} \right) \left(\prod_{k=0}^{z-1} \left(z + \frac{2}{3} \right) \right) \left(\prod_{k=0}^{z-1} (z+1) \right) \\
&= \frac{3^{3z}}{3z} \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right) (z!) \\
&= \frac{3^{3z}}{3z} \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} z \Gamma(z) \\
&= 3^{3z-1} \frac{\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)}{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}}} \\
&= \frac{3^{3z-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

1.2 Beta Fonksiyonu:

Matematikte Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonuyla yakın ilişkisi nedeniyle kalkülüs ve analizde önemlidir. Birçok kompleks integral, Beta fonksiyonunu içeren fonksiyonlara indirgenebilir.

$z, w \in \mathbb{C}$ olsun. $\beta(z, w)$ beta fonksiyonu, aşağıdaki belirli integrallerle tarif edilir:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \mu^{z-1} (1 - \mu)^{w-1} d\mu, \quad \Re(z), \Re(w) > 0,$$

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \mu^{z-1} (1 - \mu)^{w-1} d\mu, \quad z, w > 0. \quad (1.9)$$

(1.9)'de

$$\mu = 1 - \gamma, (d\mu = -d\gamma), (\mu = 0 \implies \gamma = 1, \mu = 1 \implies \gamma = 0)$$

yazalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \beta(z, w) &= - \int_1^0 (1 - \gamma)^{z-1} \gamma^{w-1} d\gamma \\ &= \int_0^1 \gamma^{w-1} (1 - \gamma)^{z-1} d\gamma \\ &= \beta(w, z) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır.

(1.9) ifadesinde $\mu = \sin^2 \phi$ yazalım ($d\mu = 2 \sin \phi \cos \phi d\phi$). Bu durumda,

$$\beta(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^{2z-1} (\cos \phi)^{2w-1} d\phi \quad (1.10)$$

elde edilir, burada $\mu = 0$ için $\phi = 0$, $\mu = 1$ için $\phi = \frac{\pi}{2}$ yazılmıştır.

Şimdi de (1.9) ifadesinde $\mu = \frac{\gamma}{c}$ ($c > 0$) yazalım ($d\mu = \frac{d\gamma}{c}$). Bu durumda,

$$\beta(z, w) = \frac{1}{c^{z+w-1}} \int_0^c \gamma^{z-1} (c - \gamma)^{w-1} d\gamma$$

bulunur.

Son olarak, (1.9) ifadesinde $\mu = \frac{\gamma}{1+\gamma}$ yazalım $\left(d\mu = \frac{d\gamma}{(1+\gamma)^2}\right)$. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\beta(z, \omega) &= \int_0^\infty \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\omega-1} \frac{d\gamma}{(1+\gamma)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{\gamma^{z-1}}{(1+\gamma)^{z-1}} \frac{1}{(1+\gamma)^{\omega-1}} \frac{d\gamma}{(1+\gamma)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{\gamma^{z-1}}{(1+\gamma)^{z+\omega}} d\gamma\end{aligned}\tag{1.11}$$

olur, burada $\mu = \frac{\gamma}{\gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}}$ ifadesinde $\mu = 1$ için $\gamma = \infty$ olmalıdır.

1.3 Beta-Gamma Fonksiyonları Arasındaki İlişki:

Öncelikle

$$\Gamma(\omega) = \int_0^\infty x^{\omega-1} e^{-x} dx, \quad \omega > 0$$

integralinde $x = y^2$ yazalım. Buradan,

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty y^{2\omega-2} e^{-y^2} 2y dy \\ &= 2 \int_0^\infty y^{2\omega-1} e^{-y^2} dy\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty x^{2z-1} e^{-x^2} dx\tag{1.12}$$

yazılabilir. Sonra, bu iki ifadeyi taraf tarafa çarparsak

$$\Gamma(z) \Gamma(\omega) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2z-1} y^{2\omega-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

olur. Buradan, xy düzleminde kutupsal koordinatlara geçerse ve

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, y = r \sin \phi, dx dy = r dr d\phi, \\ x^2 + y^2 &= r^2 \text{ ve } \frac{y}{x} = \tan \phi, \\ y &= 0 \implies \phi = 0, y = \infty \implies \phi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ifadeleri integralde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(\omega) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r^{2(z+\omega-1)} (\cos \phi)^{2z-1} (\sin \phi)^{2\omega-1} y^{2\omega-1} e^{-r^2} r dr d\phi \\ &= \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2z-1} (\sin \phi)^{2\omega-1} d\phi \right] \left[2 \int_0^{\infty} r^{2(z+\omega)-1} e^{-r^2} r dr \right] \\ &= \beta(z, \omega) \Gamma(z + \omega) \quad (1.10 \text{ ve } 1.12 \text{ den}) \\ \implies \beta(z, \omega) &= \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

elde edilir. Bu ifade, bazı belirli integrallerin hesaplanmasında çok faydalıdır. Örneğin, (1.10) ve (1.13) dan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^{2z-1} (\cos \phi)^{2\omega-1} d\phi = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{2\Gamma(z + \omega)}, \quad z, \omega > 0 \quad (1.14)$$

yazılabilir. Bu ifadede

$$2z - 1 = 0, 2\omega - 1 = r$$

yazılırsa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^r d\phi = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad r > -1$$

ve benzer şekilde

$$2z - 1 = r, 2\omega - 1 = 0$$

yazılırsa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^r d\phi = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad r > -1 \quad (1.15)$$

elde edilir. Bu tarz birçok integral Gamma fonksiyonu cinsinden hesaplanabilir.

Son olarak yukarıda ispatladığımız (1.7) formülünü Beta fonksiyonu yardımıyla başka bir yoldan ispatlayalım. Gerçekten, (1.11) ile (1.13) dan

$$\int_0^{\infty} \frac{\gamma^{z-1}}{(1+\gamma)^{z+\omega}} d\gamma = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \quad z, \omega > 0$$

yazılabilir. Bu ifadede $\omega = 1 - z$, $0 < z < 1$, yazılırsa

$$\int_0^{\infty} \frac{\gamma^{z-1}}{1+\gamma} d\gamma = \frac{\Gamma(z) \Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z) \Gamma(1-z)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\int_0^{\infty} \frac{\gamma^{z-1}}{1+\gamma} d\gamma = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

olduğundan (bakınız: [3]-[4])

$$\beta(z, 1-z) = \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad 0 < z < 1 \quad (1.16)$$

bulunur.

Örnek 1.8 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm 1.8

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}} \\ &= - \int_0^1 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1+1\right) \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}-1}}{(x+1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}} dx \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.9 $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm 1.9 Verilen integral Beta fonksiyonudur. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x)^5} dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^{4-1}}{(1+x)^{4+1}} dx \\
&= \beta(4, 1) \\
&= \frac{\Gamma(4) \Gamma(1)}{\Gamma(5)} \\
&= \frac{6 \cdot 1}{24} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^6 d\phi$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.10 (1.15) formülü kullanırsak ($r = 6$),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^6 d\phi &= \frac{\Gamma\left(\frac{6+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{2}+1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{3!} \\
&= \frac{5\pi}{32}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.11 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^4 (\cos \phi)^5 d\phi$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.11 (1.14) formülü kullanırsak ($2z - 1 = 4, 2\omega - 1 = 5$),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^{2z-1} (\cos \phi)^{2\omega-1} d\phi &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(3)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \\
&= \frac{8}{315}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.12 $\int_0^2 y \sqrt[3]{8 - y^3} dy$ integralini hesaplayınız.

İspat.

$$\begin{aligned}
y^3 &= 8z \implies \frac{2}{3} z^{-\frac{2}{3}} dz \quad (y = 0 \implies z = 0, y = 2 \implies z = 1) \\
\implies \int_0^2 y \sqrt[3]{8 - y^3} dy &= \frac{8}{3} \int_0^1 z^{-\frac{1}{3}} (1 - z)^{\frac{1}{3}} dz \\
\implies \int_0^2 y \sqrt[3]{8 - y^3} dy &= \frac{8}{3} \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\
\implies \int_0^2 y \sqrt[3]{8 - y^3} dy &= \frac{8}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{8}{9} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
\implies \int_0^2 y \sqrt[3]{8 - y^3} dy &= \frac{8}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Örnek 1.13

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{2^{2z} \cdot z!} \quad (z = 0, 1, 2, \dots)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterdikten sonra bu bağıntıdan yararlanarak

$$\beta\left(z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\pi}{2^{2z} \cdot (z!)^2}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm 1.12

$$\begin{aligned} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(z - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{3}{2}\right) \left(z - \frac{5}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2z-1)(2z-3) \cdots 3 \cdot 1}{2^z} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{2^{2z} \cdot z!} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\beta\left(z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z+1)} = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{2^{2z} \cdot z!} \frac{\sqrt{\pi}}{z!} = \frac{(2z)!\pi}{2^{2z} \cdot (z!)^2}$$

elde edilir.

Örnek 1.14

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-z^4} dz = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{6\sqrt{2}\pi}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.13

$$\begin{aligned}
z^4 &= x \implies dz = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx \\
\implies A &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \\
\implies A &= \frac{1}{4} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \\
\implies A &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies A &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^2}{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}}} \\
\implies A &= \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^2}{6\sqrt{2}\pi}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek 1.15 $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^9 + \sqrt[3]{2}x^{10}}{(1+x^3)^4} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.14 Öncelikle

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^9 + \sqrt[3]{2}x^{10}}{(1+x^3)^4} dx \quad (1.17)$$

olsun. Sonra aşağıdaki ters özdeşliği kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x) dx &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx, \\
I &= \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{x^9} + \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{10}}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^4} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{3}x^{10} + \sqrt{2}x^9 - \sqrt{2}x + \sqrt[3]{2}}{(1+x^3)^4} dx \quad (1.18)
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra, (1.17) ile (1.18) toplanırsa

$$\begin{aligned}
 (1.17) + (1.18) \quad : \quad 2I &= \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(1+x^{10})}{(1+x^3)^4} dx \\
 \implies I &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{2} \int_0^{\infty} \frac{1+x^{10}}{(1+x^3)^4} dx
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

elde edilir. Burada $t = x^3$ değişken değiştirilmesi yapılırsa ve

$$t = x^3 \implies x = t^{\frac{1}{3}} \implies dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$$

değerleri (1.19)'de yazılırsa

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{6} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(1+t)^4} dt + \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{8}{3}}}{(1+t)^4} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{6} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(1+t)^4} dt + \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{8}{3}}}{(1+t)^4} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{6} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{3}+\frac{11}{3}}} dt + \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{11}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{3}+\frac{11}{3}}} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{3} \beta \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3} \right) \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{3} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{11}{3} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{3} + \frac{11}{3} \right)} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{3} \cdot \frac{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)}{\Gamma(4)} \\
 &= \frac{80 (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) \pi}{243 \sqrt{3}} \\
 \implies \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^9 + \sqrt[3]{2}x^{10}}{(1+x^3)^4} dx &= \frac{80 (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) \pi}{243 \sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.16 $\Re(z), \Re(\omega) > 0$ olan tüm $z, \omega \in \mathbb{C}$ için

$$\beta(z, \omega) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)} \tag{1.20}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.15

$$D = (0, \infty) \times (0, \infty)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(\omega) &= \left(\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^\infty y^{\omega-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{z-1} y^{\omega-1} e^{-(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

olur. Sonra aşağıdaki

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \implies \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

ve

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

değişkenlerinin değişimini kullanarak

$$\begin{aligned} \iint_D x^{z-1} y^{\omega-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{z-1} (u(1-v))^{\omega-1} e^{-u} |-u| du dv \\ &= \iint_{D'} u^{z+\omega-1} v^{z-1} (1-v)^{\omega-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{z+\omega-1} v^{z-1} (1-v)^{\omega-1} e^{-u} du dv \\ &= \left(\int_0^\infty u^{z+\omega-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{\omega-1} dv \right) \\ &= \Gamma(z+\omega) \beta(z, \omega) \end{aligned}$$

elde ederiz, burada u, v koordinatlarında D 'ye karşılık gelen D' tanım bölgesi

$$D' = \{(u, v) : u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

şeklindedir. Buradan, (1.20) elde edilir.

Örnek 1.17 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+25t^2} dt$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm 1.16 Öncelikle, $u = \sqrt{5}t$, $t = \frac{u}{\sqrt{5}}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{5}}du$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{u}{5^{\frac{1}{2}}}}}{1+u^2} \frac{1}{\sqrt{5}} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}}}{1+u^2} \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2} du \end{aligned}$$

olur. Sonra, $u = \tan \theta$, $du = \sec^2 \theta d\theta$, $1+u^2 = \sec^2 \theta$ olsun. Bu durumda yukarıdaki integral

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan \theta)^{\frac{1}{2}}}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{1}{2}} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta \end{aligned}$$

integraline dönüşür. (1.10) ve (1.16)' den

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt[4]{125}} \frac{1}{2} \beta \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt[4]{125}} \frac{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt[4]{125}} \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt[4]{125}} \end{aligned}$$

bulunur.

1.4 Gamma Fonksiyonunun Uygulaması:

Tanım 1.1 Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçüsü $|E| = \int_E dx$

ile gösterilir. Örnek olarak, 3-boyutlu uzayda $S : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ küresi düşünülürse, bu kürenin ölçüsü onun hacmidir ve $36\pi b r^3$ dür. Ancak S nin yüzeyi Γ ile gösterilirse Γ 3-boyutlu uzayda dejenere bölge olarak adlandırılır ve ölçüsü sıfırdır. Sonuç olarak $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küre yüzeyinin ölçüsü sıfırdır. Benzer şekilde, $n = 2$ olduğunda $S : x^2 + y^2 \leq 9$ diskinin ölçüsü onun alanıdır ve sınırının ölçümü sıfırdır. 1-boyutlu uzayda $S = [a, b]$ ise ölçüsü aralığın uzunluğu, yani $b - a$ ve sınırının ölçümü, yani $\Gamma = \{a, b\}$ nin ölçüsü sıfırdır.

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı; $x.y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere tüm $x = (x_1, \dots, x_n)$ noktalarının kümesidir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \dots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde bir f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ile gösterilir. Çok katlı bir integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim. dx hacim elemanını $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ biçiminde yazarız, burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür. Bu durumda eğer $f(x) \geq 0$ integrallenebilir bir fonksiyon ise Fubini teoreminden

$$\int f(x) dx = \int_0^\infty \left\{ \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma \right\} r^{n-1} dr = \int_{S^{n-1}} \left\{ \int_0^\infty f(x) r^{n-1} dr \right\} d\sigma \quad (1.21)$$

elde edilir. Eğer $x \neq 0 = (0, \dots, 0)$ ise bu durumda $x = |x| \frac{x}{|x|} = r x'$ dir, burada $x' = \frac{x}{|x|}$, S^{n-1} üzerinde x in izdüşümüdür. S^{n-1} üzerindeki değişkeni çoğu kez x' ile gösterdiğimizden $d\sigma$ yerine dx' yazmak uygundur. Örnek olarak,

$$\begin{aligned}
|B(0, 2)| &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \int_{S^{n-1}} dx' \int_0^2 r^{n-1} dr \\
&= |S^{n-1}| \frac{2^n}{n}
\end{aligned}$$

biçimindedir, burada $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $\mathbb{R}^n$ de yarıçapı 1 olan S^{n-1} birim küresinin

yüzey alanıdır. $\Gamma(n)$, gamma fonksiyonudur ve $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ ile

tanımlanır. Ayrıca daha genel olarak, $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ kümesi merkezi x , yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve $B(x, r)^C$ onun tümleyenini gösterebiliriz. $|S^n| = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = |S^n| r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} r^n = \frac{1}{n} |S^{n-1}| r^n$$

biçiminde yazabiliriz.

Şimdi yukarıda belirttiğimiz formülleri ispatlamaya çalışalım. Bunun için önce aşağıdaki tanıma ihtiyacımız var.

Tanım 1.2 (Fubini Teoremi) $X \times Y$, $\mathbb{R}^{m+n}$ de $X \subset \mathbb{R}^m$ ve $Y \subset \mathbb{R}^n$ aralıklarının doğrudan çarpımı olan bir aralık olsun. $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde integrallenebilirse,

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy, \int_X dx \int_Y f(x, y) dy, \int_Y dy \int_X f(x, y) dx \quad (1.22)$$

integrallerinin üçü de mevcuttur ve eşittir. Sonuç olarak, Fubini teoremi, belirli yinelemeli integrallerde integral sırasının değiştirilmesine izin verir. Fubini teoremi, iki yinelemeli integralin, integrandları boyunca karşılık gelen çift katlı integrale eşit olduğunu ima eder.

Örnek 1.18 $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve $R : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ için

$\iint_R f(x, y) dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.17

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y) dA &= \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx \\
&= \int_0^2 [y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx \\
&= \int_0^2 2dx = 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy \\
&= \int_{-1}^1 [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy \\
&= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^1 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Örnek 1.19 $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ve $R : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ için

$\iint_R f(x, y) dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.18 Fonksiyon $(0, 0)$ noktasında süreksiz olduğundan (1.22) formülü

kullanılamaz. Nitekim kontrol ettiğimizde şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\
 &= \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\
 &= - \arctan x \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Örnek 1.20 $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ve $R : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ için

$\iint_R f(x, y) dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1.19

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy, \quad y \neq 0 \\
 &= \int_{-1}^1 0 dy = 0
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx, \quad x \neq 0 \\ &= \int_{-1}^1 0 dx = 0\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = 0;$$

olur. Ancak

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \geq \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (\sin \phi \cos \phi / r) d\phi = 2 \int_0^1 dr / r = \infty$$

olduğu için kare üzerindeki Lebesgue çift katlı integrali mevcut değildir.

Lemma 1.2 $n > 1$ için $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ ve $|S^n| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ dir. Dolayısıyla, $|S^{2m}| = \frac{\pi^m}{m!}$ ve $|S^{2m+1}| = \frac{2(2\pi)^m}{1.3.5 \dots (2m+1)}$ dir. Ayrıca, $|S^{n-1}| = n |S^n|$, $S^{n-1} = S(0, 1)$ 'in standart yüzey alanıdır.

İspat. Fubini teoremine göre,

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)) dx_1 dx_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_1^2) dx_1 \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_2^2) dx_2 \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-|x|^2) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta dr = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2} = \pi,\end{aligned}$$

olduğundan,

$$F = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|x|^2) dx = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_k^2) dx_k = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right)^n = \pi^{n/2}$$

olur.

Diğer taraftan, (1.21)'den

$$\begin{aligned} F &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r^{n-1} dr dx' \\ &= \int_{S^{n-1}} dx' \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r^{n-1} dr \\ &= |S^{n-1}| \int_0^{\infty} \exp(-\omega) \omega^{\frac{n}{2}-1} d\omega \\ &= \frac{1}{2} |S^{n-1}| \Gamma(n/2), \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\Gamma(n)$, gama fonksiyonudur.

Ayrıca, $\Gamma(1+\omega) = \omega\Gamma(\omega)$ olduğundan, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} |S^n| &= \int_{|x| \leq 1} dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^{n-1} dr dx' = \frac{1}{n} |S^{n-1}| \\ &= \frac{1}{n} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

Buradan herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\rho > 0$ için, merkezi x ve yarıçapı ρ olan $S_\rho(x)$ küresinin alanının ve hacminin $\rho^n |S^n| = \rho^{n\frac{1}{n}} |S^{n-1}|$ 'ye eşit olduğunu gözlemleriz. Bildiğimiz gibi, tek değişkenli integral için aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{|x|^\alpha} = \begin{cases} \text{yakınsak, } \alpha < 1 \\ \text{ıraksak, } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

ve

$$\int_1^\infty \frac{dx}{|x|^\alpha} = \begin{cases} \text{yakınsak, } \alpha > 1 \\ \text{ıraksak, } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'deki duruma bakalım.

Now let's look at the situation in $\mathbb{R}^n$.

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

x 'in normunu gösterdiğini varsayarak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

integrallerini ele alalım. Burada integrandlar 0 ve sonsuzda tanımlı değildir, yani bu integral $x = 0$ ve $x = \infty$ 'da tekilliğe sahiptir, bu nedenle bu integrali aşağıdaki gibi iki parçaya ayıracağız:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^\alpha} &= \int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} \\ &= F_1 + F_2, \end{aligned}$$

burada $r = |x|$, hacim elemanı dx , "kutupsal koordinatlarında" $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ şeklinde yazılabilir ve $d\sigma$, dx tarafından $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ birim küresi üzerinde belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Önce F_1 'yi tahmin edelim.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr \\ &= |S^{n-1}| \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-n+1}} dr \\ &= |S^{n-1}| \begin{cases} \alpha - n + 1 < 1, & \alpha < n \text{ için yakınsak} \\ \alpha - n + 1 \geq 1, & \alpha \geq n \text{ için ıraksak} \end{cases} \\ &= |S^{n-1}| \int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr \\ &= \frac{|S^{n-1}|}{n - \alpha}, \text{ yalnızca } n - \alpha > 0 \text{ ise,} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi F_2 durumuna bakalım.

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{S^{n-1}} \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr d\sigma \\
&= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr \\
&= |S^{n-1}| \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-n+1}} dr \\
&= |S^{n-1}| \begin{cases} \alpha - n + 1 > 1, & \alpha > n \text{ için yakımsak} \\ \alpha - n + 1 \leq 1, & \alpha \leq n \text{ için ıraksak} \end{cases} \\
&= |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr \\
&= \frac{|S^{n-1}|}{\alpha - n}, \text{ yalnızca } \alpha - n > 0 \text{ ise,}
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, $\alpha = n$ ise, bu durumda $F_1 = F_2 = \infty$ olur.

Son olarak, $n = 3$ için kürenin hacmini bulalım. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
|S^3| &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde birim kürenin yüzey alanı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$|S^2| = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} = 4\pi$$

olur, burada

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir (bakınız:[5]).

Daha genel olarak, $c_1, c_2, \dots, c_n$ pozitif reel sayıları için n -boyutlu

$$B_{c_1, c_2, \dots, c_n} := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1|^{c_1} + \dots + |x_n|^{c_n} \leq 1\}$$

bölgenin hacmi

$$|B_{c_1, c_2, \dots, c_n}| = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{c_1}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{c_1} + \dots + \frac{1}{c_n}\right)}$$

formülü ile bulunur. ■

1.5 Hipergeometrik Fonksiyonlar:

Hipergeometrik fonksiyonlar, kesirli analizde önemli bir rol oynar. Kummer, Gauss, Euler ve Pfaff (1765-1825) dahil olmak üzere birçok matematikçi tarafından bu fonksiyon incelenmiştir. Ramanujan (1887-1920) da klasik hipergeometrik fonksiyon teoremini ayrı bir şekilde ortaya koymuştur.

r, s ve t reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{rs}{t} \frac{z}{1!} + \frac{r(r+1)s(s+1)}{t(t+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (1.23)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri

$$1 + z + z^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} z^m$$

geometrik serisinin bir genelleştirmesi olduğundan hipergeometrik seri (=Gauss hipergeometrik fonksiyon) adını alır. (1.23)' den görülmektedir ki, t değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (1.23) hipergeometrik serisi $|z| < 1$ için yakınsak, $|z| > 1$ için ise ıraksaktır. $|z| = 1$ için $t > r + s$ ise seri mutlak yakınsak olur. Ayrıca $z = -1$ iken $t > r + s - 1$ ise seri yakınsaktır (bakınız:[6]-[7]).

r reel ya da kompleks bir sayı, m sıfır veya pozitif bir tam sayı olmak üzere $(r)_m$ ifadesi

$$\begin{aligned} (r)_m &= r(r+1)(r+2)\dots(r+m-1) \\ (r)_0 &= 1, \quad r \neq 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade Pochhammer sembolü olarak bilinir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(r)_m = \frac{\Gamma(r+m)}{\Gamma(r)} \quad (1.25)$$

$$(r)_{m+1} = r(r+1)_m. \quad (1.26)$$

Pochhammer sembolünün (1.24) gösterimi dikkate alınarak, (1.23) hipergeometrik serisi

$$F_{[2,1]}(r, s; t; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_m (s)_m}{(t)_m} \frac{z^m}{m!} \quad (1.27)$$

şeklinde yazılabilir. (1.27) eşitliğinde görülen F fonksiyonunun sağ alt köşesindeki $[2, 1]$ indisi yapısında biri r ve s diğeri t olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. Burada, $|z| < 1$ ve t paydası sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (1.27)'nin yakınsaklık yarıçapı, r veya s pozitif olmayan bir tam sayı olmadığı sürece 1'dir; bu durumda aşağıdaki gibi bir polinomumuz olur:

$$F_{[2,1]}(-p, s; t; z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{p}{m} \frac{(s)_m}{(t)_m} z^m, \quad r = -p < 0.$$

şeklinde polinom olarak ifade edilir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden $F_{[2,1]}$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$$F_{[2,1]}(r, s; t; z) = F(r, s; t; z)$$

olup, bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak tanımlanır. (1.25) eşitliğinden hipergeometrik fonksiyonun r ve s değişkenlerine göre simetrik olduğu görülür.

(1.27) eşitliğinin genelleştirilmiş ifadesi

$$\begin{aligned} F_{[q,p]}(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_l; z) &= F_{[q,p]} \left[\begin{matrix} r_1, r_2, \dots, r_q \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{matrix} ; z \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r_1)_m (r_2)_m \dots (r_q)_m}{(s_1)_m (s_2)_m \dots (s_p)_m} \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada, bu seri, $q \leq p$ ise tüm z 'ler için yakınsaktır, eğer $q = p+1$ ise $|z| < 1$ ve tüm sıfırdan farklı z 'ler için yakınsaktır. Fakat bu seri, $q > p+1$ ve tüm $s_j > 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, l$ ve $r_i > 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ise iraksaktır.

Örnekler:

$$\begin{aligned}
\log(1-z) &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+1}}{m+1} \\
&= -z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m} \frac{z^m}{m!} \\
&= -zF(1, 1; 2; z), \quad |\arg(1-z)| < \pi \\
\log \frac{1+z}{1-z} &= 2zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z\right); \quad \cos z = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 zx\right) \\
\arcsin z &= zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right), \quad |\arg(1 \pm zi)| < \pi \\
\frac{1}{(z-r)^r} &= F(r, 1; 1; z), \quad |z| < 1 \\
\arctan z &= zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right), \quad |\arg(1 \pm zi)| < \pi \\
\cosh z &= \lim_{r,s \rightarrow \infty} F\left(r, s; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4rs}\right).
\end{aligned}$$

Örnek 1.21 $F(r, s; t; x)$ hipergeometrik fonksiyonun birinci mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm 1.20 (1.26) den

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} F(r, s; t; x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r)_m (s)_m}{(t)_m} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_{m+1} (s)_{m+1}}{(t)_{m+1}} \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r(r+1)_m s(s+1)_m}{t(t+1)_m} \frac{x^m}{m!} \\
&= \frac{rs}{t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r+1)_m (s+1)_m}{(t+1)_m} \frac{x^m}{m!} \\
&= \frac{rs}{t} F(r+1, s+1; t+1; x)
\end{aligned}$$

olup, benzer şekilde n . türevi

$$\frac{d^n}{dx^n} F(r, s; t; x) = \frac{(r)_n (s)_n}{(t)_n} F(r+n, s+n; t+n; x)$$

şeklinde bulunur.

Virchenko vd., 'Wright tipi hipergeometrik fonksiyon' adı verilen genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu şu şekilde tanıttılar:

$$R_{[2,1]}^{(\lambda)}(z) = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_m \Gamma(s + \lambda m)}{\Gamma(t + \lambda m) m!} z^m,$$

burada $\lambda > 0$ ve $|z| > 0$ dir. Burada, $\lambda = 1$ için klasik hipergeometrik fonksiyon elde edilir.

Diğer taraftan, yukarıda bahsedilen Wright tipi genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon olarak bilinen genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu daha da genişletirsek ve bunu da $\Psi_{[q,p]}$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned} & \Psi_{[q,p]}[(r_1, R_1), (r_2, R_2), \dots, (r_q, R_q); (s_1, S_1), (s_2, S_2), \dots, (s_q, S_q); z] \\ &= \Psi_{[q,p]} \left[\begin{array}{c} (r_1, R_1), (r_2, R_2), \dots, (r_q, R_q) \\ (s_1, S_1), (s_2, S_2), \dots, (s_q, S_q) \end{array} ; z \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^q \Gamma(r_i + R_i m)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(s_j + S_j m)} \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada R_i ve S_j ,

$$1 + \sum_{j=0}^p S_j - \sum_{i=0}^q R_i > 0$$

olacak şekilde pozitif reel sayılardır. Bundan başka, tüm i ve j için $R_i = S_j = 1$ ise bu durumda klasik hipergeometrik fonksiyon elde edilir.

Asağıdaki teorem integral ve toplam sembollerinin yer değiştirmesi ile ilgilidir.

Teorem 1.3 $\sum f_m, [a, b]$ üzerinde sınırlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_m$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_a^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_m(x) dx \right)$$

eşitliği geçerlidir (bakınız:[8]).

Örnek 1.22 $F(r, s; t; x)$ hipergeometrik fonksiyonunun $|x| < 1$ ve $0 < s < t$ için

$$\frac{1}{\beta(s, t-s)} \int_0^1 z^{s-1} (1-z)^{t-s-1} (1-xz)^{-r} dz$$

şeklinde bir integral gösterimine sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.21 Beta fonksiyonunun (1.9)'deki tanımından ve Pochhammer sembolünün özelliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{(s)_m}{(t)_m} &= \frac{\beta(s+m, t-s)}{\beta(s, t-s)} \\ &= \frac{1}{\beta(s, t-s)} \int_0^1 z^{s+m-1} (1-z)^{t-s-1} dz \end{aligned} \quad (1.28)$$

yazılabilir. Buradan, (1.28) ifadesi (1.27) ifadesinde yerine yazılırsa

$$F(r, s; t; x) = \frac{1}{\beta(s, t-s)} \sum_{m=0}^{\infty} (r)_m \frac{x^m}{m!} \int_0^1 z^{s+m-1} (1-z)^{t-s-1} dz$$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integrasyon işleminin sırası değiştirilirse (Teorem 1.3'den)

$$F(r, s; t; x) = \frac{1}{\beta(s, t-s)} \int_0^1 z^{s-1} (1-z)^{t-s-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_m}{m!} (xz)^m dz$$

elde edilir. Diğer taraftan $(1-xz)^{-r}$ ifadesinin binom açılımından dolayı

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_m}{m!} (xz)^m = (1-xz)^{-r}$$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç $|x| < 1$ ve $0 < s < t$ için

$$F(r, s; t; x) = \frac{1}{\beta(s, t-s)} \int_0^1 z^{s-1} (1-z)^{t-s-1} (1-xz)^{-r} dz$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 1.3 $\Re(p) > 0$, $\Re(t) > \Re(s) > 0$ ve $|z| < 1$ olsun. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu

$$F_p(r, s; t; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r)_m}{m!} \frac{\beta_p(s+m, t-s)}{\beta(s, t-s)} z^m$$

ile de tanımlanır (bakınız:[7]).

1.6 Mittag-Leffler Fonksiyonu:

Mittag-Leffler fonksiyonu 1903 yılında Mittag-Leffler [9] tarafından tanıtılmış ve

$$E_{\rho}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + 1)} \quad (1.29)$$

olarak tanımlanmıştır, burada $z, \rho \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\rho) > 0$ dir. (1.29) ile verilen fonksiyon aynı zamanda tek parametrelili Mittag-Leffler olarak da adlandırılır.

Mittag-Leffler fonksiyonu, biyoloji, fizik ve uygulamalı bilimlerin karmaşıklıklarına doğrudan bağlılığı sayesinde popülerlik ve önem kazanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonu, analitik fonksiyonların incelenmesindeki çeşitli zorlukların üstesinden gelmede önemli bir rol oynayan mütevazı bir fonksiyondur. Üstel fonksiyonun tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerde önemli bir rol oynaması gibi, Mittag-Leffler fonksiyonu da kesirli diferansiyel denklemlerde benzer bir rol oynar. Mittag-Leffler fonksiyonu, üstel fonksiyonun McLaurin seri açılımı göz önüne alındığında $\Re(\rho) > 0$ olmak üzere e^z üstel fonksiyonunun bir genellemesidir. Üstelik, ρ ' nun bazı özel değerlerine karşılık tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ile bazı elementer fonksiyonlar arasında çeşitli ilişkiler vardır. Örneğin,

$$\begin{aligned} \cdot E_0(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1) \\ \cdot E_1(\pm z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m z^m}{m!} = e^{\pm z} \\ \cdot E_2(-z^2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = \cos z \\ \cdot E_2(z^2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = \cosh z \end{aligned}$$

dir. Bu örnekleri ρ ' nun diğer özel değerlerini kullanarak çoğaltmak da mümkündür.

Mittag-Leffler fonksiyonunun, daha sonra ortaya çıkan çeşitli problemlerin açıklanması için gerekli olduğu ile ilgili ortaya çıkan birçok dikkat çekici özelliği vardır. Wiman [10], Humbert ve Agarwal [11], Mittag-Leffler fonksiyonunu

$$E_{\rho, \eta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \quad (1.30)$$

ile genelleştirdiler, burada $z, \rho, \eta \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\rho) > 0$, $\Re(\eta) > 0$ dir. (1.30) ile verilen fonksiyon aynı zamanda iki parametrelili Mittag-Leffler olarak da adlandırılır.

Şimdi iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özel durumlarını inceleyelim:

$$\begin{aligned}
1. E_{0,0}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(0m+0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\infty} = 0, |z| < 1 \\
2. E_{0,1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(0m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}, |z| < 1 \\
3. E_{0,2}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(0m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{1} = \frac{1}{1-z}, |z| < 1 \\
4. E_{0,2}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(0m+3)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{2} = \frac{1}{2(1-z)}, |z| < 1 \\
5. E_{0,\varrho}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(0m+\varrho)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\varrho)} = \frac{1}{\Gamma(\varrho)(1-z)}, \varrho \in \mathbb{R}, |z| < 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a. E_{0,\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(1-z)\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-z)}, |z| < 1 \\
b. E_{0,\frac{3}{2}}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(1-z)\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(1-z)}, |z| < 1 \\
c. E_{0,\frac{5}{2}}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(1-z)\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}(1-z)}, |z| < 1 \\
d. E_{0,n+\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(1-z)\Gamma(n+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{2^n}{(2n-1)!\sqrt{\pi}(1-z)}, n = 0, 1, 2, \dots, |z| < 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i) E_{1,1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z \\
(ii) E_{1,2}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m+2)} = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \\
(iii) E_{1,3}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iv) \quad E_{\rho,1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + 1)} = E_{\rho}(z) \\
(v) \quad E_{1,j}(z) &= \frac{1}{z^{j-1}} \left[e^z - \sum_{t=0}^{j-2} \frac{z^t}{t!} \right]
\end{aligned}$$

ρ ve η parametrelerinin özel seçimleri ile $E_{\rho,\eta}$ fonksiyonu bazı bilindik ve iyi bilinen fonksiyonlara dönüşür. Örneğin,

$$\begin{aligned}
\cdot E_{2,1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(2m)!} = \cosh \sqrt{z} \\
\cdot E_{2,2}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(2m+1)!} = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \\
\cdot E_{2,3}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(2m+2)!} = \frac{\cosh \sqrt{z} - 1}{\sqrt{z}} \\
\cdot E_{2,1}(z^2) &= \cosh(z) \\
\cdot E_{2,2}(z^2) &= \frac{\sinh(z)}{z} \\
\cdot E_{2,1}(-z^2) &= \cos(z) \\
\cdot E_{2,2}(-z^2) &= \frac{\sinh(z)}{z} \\
\cdot E_{\frac{1}{2},1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} = e^{z^2} \operatorname{erf} c(-z),
\end{aligned}$$

burada $\operatorname{erf} c$, erf hata fonksiyonunun tamamlayıcısıdır:

$$\operatorname{erf} c(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Diğer taraftan, hata fonksiyonun diğer özelliklerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\cdot \operatorname{erf}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0 = 0 \\
\cdot \operatorname{erf}(\infty) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-u^2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot \operatorname{erf}(-z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z} e^{-u^2} du = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-u^2} du \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, [e^{-u^2} \rightarrow \text{çift}] \\
&= -\operatorname{erf}(z) \\
&\implies \operatorname{erf} \text{ fonksiyonu tektir.} \\
\cdot \operatorname{erf}(iz) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-iz} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{u^2} du.
\end{aligned}$$

Günümüzdeki birçok uygulamada reel değişkenli iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle, literatürde bu tip fonksiyonların çeşitli integral temsilleri, yineleme bağıntıları, sıfırlarının dağılımı ve asimtotik ilişkileri ve kesirli türev ile ilişkileri üzerine bazı temel özelliklerine çokça rastlanmaktadır.

Lemma 1.3 *Aşağıdaki önermeler geçerlidir:*

- (1) $E_{\rho,\eta}(z) = zE_{\rho,\rho+\eta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\eta)}, \Re(\rho) > 0, \Re(\eta) > 0$
- (2) $E_{\rho,\eta}(z) = \eta E_{\rho,\eta+1}(z) + z\rho \frac{d}{dz} E_{\rho,\eta+1}(z), \Re(\rho) > 0, \Re(\eta) > 0$
- (3) $\frac{d}{dz} E_{\rho,\eta}(z) = \frac{1}{\rho z} [E_{\rho,\eta-1}(z) - (\eta-1) E_{\rho,\eta}(z)], \Re(\rho) > 0, \Re(\eta) > 0$
- (4) $\left(\frac{d}{dz}\right)^q [z^{n-1} E_{\rho,\eta}(\mu z^\rho)] = z^{\eta-q-1} E_{\rho,\eta-q}(\mu z^\rho), \Re(\eta-q) > 0, q \in \mathbb{N}.$

İspat. (1) $E_{\rho,\eta}(z)$ 'nin tanımından

$$E_{\rho,\eta+\rho}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho(m+1) + \eta)}$$

yazılabilir. Burada, $m \rightarrow m-1$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\eta+\rho}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho(m+1) + \eta)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{m-1}}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&= \frac{1}{z} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} - \frac{1}{\Gamma(\eta)} \right] \\
&= \frac{1}{z} \left[E_{\rho,\eta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\eta)} \right] \\
&\implies E_{\rho,\eta}(z) = zE_{\rho,\rho+\eta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\eta)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2)

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\eta}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \Rightarrow E_{\rho,\eta+1}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} \\
&\Rightarrow z\rho \frac{d}{dz} E_{\rho,\eta+1}(z) = z\rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m z^{m-1}}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho m z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} \\
&\Rightarrow \eta E_{\rho,\eta+1}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} + \frac{\eta}{\Gamma(\eta + 1)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\eta E_{\rho,\eta+1}(z) + z\rho \frac{d}{dz} E_{\rho,\eta+1}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} + \frac{\eta}{\Gamma(\eta + 1)} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho m z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\eta + \rho m) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\eta + \rho m) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\eta + \rho m) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} = E_{\rho,\eta}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3)

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\eta}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&\Rightarrow z\rho \frac{d}{dz} E_{\rho,\eta}(z) = z\rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m z^{m-1}}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho m z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
E_{\rho,\eta-1}(z) - (\eta - 1) E_{\rho,\eta}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho m + \eta - 1)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\eta - 1) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\rho m + \eta - 1) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\eta - 1) z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho m z^m}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&\implies E_{\rho, \eta-1}(z) - (\eta - 1) E_{\rho, \eta}(z) = z \rho \frac{d}{dz} E_{\rho, \eta}(z)
\end{aligned}$$

bulunur.

(4) İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun (1.30) tanımının doğrudan bir sonucudur. Gerçekten, (1.30)'ü ve işaret toplamı altında terim terim türevlemeyi kullanarak (bu durum (1.30) serisinin herhangi bir kompakt $\mathbb{C}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsamasına uygun olarak mümkündür),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz}\right)^q [z^{n-1} E_{\rho, \eta}(z^\rho)] &= \left(\frac{d}{dz}\right)^q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m z^{\rho m + \eta - 1}}{\Gamma(\rho m + \eta)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\rho m + \eta - 1)! (\mu z^\rho)^m z^{\eta - q - 1}}{\Gamma(\rho m + \eta) (\rho m + \eta - 1 - q)!} \\
&= z^{\eta - q - 1} E_{\rho, \eta - q}(\mu z^\rho)
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

(4)'de $q = 1$ alındığında, (1.30) tanımını ve terim bazında integrasyonu kullanarak, hemen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.1

$$\int_0^z E_{\rho, \eta}(\mu \tau^\rho) \tau^{\eta-1} d\tau = z^\eta E_{\rho, \eta+1}(\mu z^\rho) \quad (\eta > 0)$$

dir.

Yukarıdaki sonucun genel ilişkisi aşağıdaki Lemmada verilmiştir.

Lemma 1.4

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z (z - \tau)^{s-1} E_{\rho, \eta}(\mu \tau^\rho) \tau^{\eta-1} d\tau = z^{n+s-1} E_{\rho, \eta+s}(\mu z^\rho) \quad (s > 0, \eta > 0), \tag{1.31}$$

dir, burada integrasyon, 0 ve z noktalarını birleştiren doğru boyunca gerçekleştirilir (bakınız:[12]).

İyi bilinen

$$\sum_{h=0}^{m-1} e^{i2\pi \frac{hk}{m}} = \begin{cases} m & \text{if } k \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 & \text{if } k \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

ayrık ortogonallik ilişkisini kullanarak ve $E_{\rho,\eta}(z)$ fonksiyonunun (1.30) tanımından

$$\sum_{h=0}^{m-1} E_{\rho,\eta} \left(z e^{i2\pi \frac{h}{m}} \right) = m E_{\frac{\rho}{m},\eta} (z^m), \quad (m \geq 1)$$

elde edilir. Burada ρ yerine $m\rho$ ve z yerine $z^{\frac{1}{m}}$ koyarsak

$$E_{\rho,\eta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} E_{m\rho,\eta} \left(z^{\frac{1}{m}} e^{i2\pi \frac{h}{m}} \right), \quad (m \geq 1) \quad (1.32)$$

elde ederiz.

Benzer şekilde,

$$E_{\rho,\eta}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m E_{(2m+1)\rho,\eta} \left(z^{\frac{1}{2m+1}} e^{i2\pi \frac{h}{2m+1}} \right), \quad (m \geq 0) \quad (1.33)$$

formülü

$$\sum_{h=-m}^m e^{i2\pi \frac{hk}{2m+1}} = \begin{cases} 2m+1 & \text{if } k \equiv 0 \pmod{2m+1} \\ 0 & \text{if } k \not\equiv 0 \pmod{2m+1} \end{cases}$$

ilişkisinden elde edilebilir.

Sonuç olarak, (1.31), (1.32) ve (1.33) formüllerinden aşağıdaki Lemma 1.5'nin doğru olduğu anlaşılmaktadır. Burada ayrıntıları geçiyoruz.

Lemma 1.5 *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\begin{aligned} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z (z-\tau)^{s-1} e^{\mu\tau} d\tau &= z^s E_{1,s+1}(\mu z) \quad (s > 0), \\ \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z (z-\tau)^{s-1} \cosh(\mu\tau) d\tau &= z^s E_{2,s+1}(\mu z^2) \quad (s > 0), \\ \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z (z-\tau)^{s-1} \sinh(\mu\tau) d\tau &= z^{s+1} E_{2,s+2}(\mu z^2) \quad (s > 0) \end{aligned}$$

(bakınız:[12]).

1.7 Laplace Dönüşümü

Bu kısımda birçok mühendislik probleminin modellendiği başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde yararlı bir dönüşüm olan Laplace dönüşümünü inceleyeceğiz. Laplace dönüşümü, bir reel sayı olan x serbest değişkenine bağlı bir F - fonksiyonuna yine bir reel sayı olan s parametresine bağlı bir f - fonksiyonuna dönüştürür. Burada hemen ifade edelim ki, F - fonksiyonu tek bir x - değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğu gibi birden fazla serbest değişkene bağlı bir fonksiyon da olabilir. F - fonksiyonun tek değişkenli olması durumunda karşılaşılan başlangıç değer problemi, Laplace dönüşümü ile s parametresini içeren bir cebirsel probleme dönüşür.

Kabaca bu kısımda Laplace dönüşümü ve konvolüsyon ile ilgili genel bilgiler vereceğiz.

Tanım 1.4 $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ($x < 0$ için $F(x) = 0$ kabul edilir.) ve $s \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} F(x) dx$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak olmak üzere,

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \quad (1.34)$$

şeklinde bir integral dönüşümü olarak tanımlanan $f(s)$ fonksiyonuna $F(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

ile gösterilir. O halde Laplace dönüşümü, $F(x)$ fonksiyonunu $f(s)$ fonksiyonuna dönüştüren bir $\mathcal{L}$ operatörü olarak düşünülebilir.

Uyarı 1.2 (1.34) genelleştirilmiş integrali $F(x)$ 'in her durumu ve her s için yakınsak olmaz. Bu integralin yakınsak olması için $F(x)$ üzerine bazı kısıtlamalar getirilmelidir. $F(x)$ üzerine getirilen bu kısıtlamalara karşın integralin yakınsak olması için s değerleri belirtilmelidir.

Örnek 1.23 $F(x) = 1, x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.22

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} 1 dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} dx \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_0^r = \frac{1}{s}, s > 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s}, s > 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.24 $F(x) = x, 0 < x < \infty$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.23

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{x\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} x dx \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2} (sx + 1) \right]_0^r = \frac{1}{s^2}, s > 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{x\} &= \frac{1}{s^2}, s > 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.25

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ 6 & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.24

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \\
&= \int_1^2 e^{-sx} 6 dx \\
&= \frac{6}{s} (e^{-s} - e^{-2s}), s > 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.26 $F(x) = e^{ax}, x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.25

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{e^{ax}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{(a-s)x} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)x}}{a-s} \right]_0^r = \frac{1}{s-a}, s > a \\ \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax}\} &= \frac{1}{s-a}, s > a\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.27

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{0!} - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right\}$$

Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.26

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{0!} - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right\} &= \mathcal{L}\{e^{-x}\} \\ &= \frac{1}{s+1}, s > -1\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.28 $F(x) = \cos ax, x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.27

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{\cos ax\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos ax dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} \cos ax dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (-s \cos ax + a \sin ax) \right]_0^r \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \forall s > 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos ax\} &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \forall s > 0\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.29

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} \arcsin u du}{x} \right\}$$

Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.28

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} \arcsin u du}{x} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{(\arcsin(\sin x)) \cos x - 0}{x} \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{x \cos x}{x} \right\} \\ &= \mathcal{L} \{ \cos x \} \\ &= \frac{s}{s^2 + 1}, \forall s > 0 \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.30 $F(x) = \{\cos^4 x - \sin^4 x\}$, $x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.29

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \cos^4 x - \sin^4 x \} &= \mathcal{L} \{ (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) \} \\ &= \mathcal{L} \{ \cos 2x \} \\ &= \frac{s}{s^2 + 4}, \forall s > 0 \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.31 $F(x) = \cosh ax$, $x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.30

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{\cosh ax\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-ax} dx \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{ax}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-ax}\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) \\
&= \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a| \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{\cosh ax\} &= \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.32 $F(x) = \sin ax, x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.31

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{\sin ax\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin ax dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} \sin ax dx \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (s \sin ax + a \cos ax) \right]_0^r \\
&= \frac{a}{s^2 + a^2}, \forall s > 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin ax\} &= \frac{a}{s^2 + a^2}, \forall s > 0
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.33 $F(x) = \sinh ax, x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.32

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{\sinh ax\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-ax} dx \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{ax}\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-ax}\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) \\
&= \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a| \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{\cosh ax\} &= \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.34 $n > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm 1.33

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x^n\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = \int_0^{\infty} e^u \left(-\frac{u}{s}\right)^n \left(-\frac{du}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^u u^n du \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

olur. Örneğin, (1.35)'de $n = -\frac{1}{2}$ yazılırsa, (1.3)'dan

$$\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0$$

elde edilir. Benzer şekilde, (1.35)'de $n = \frac{3}{2}$ yazılırsa, (1.8)'den

$$\mathcal{L}\left\{x^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{\frac{3}{2}!}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}, s > 0$$

bulunur.

Uyarı 1.3 Her fonksiyonun Laplace dönüşümü yoktur. Yani, bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün olabimesi için

1. $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, parçalı sürekli bir fonksiyon
2. $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, α üstel mertebeden bir fonksiyon
ise F fonksiyonunun bir Laplace dönüşümü vardır.

Laplace dönüşümünün varlık teoremini vermeden önce yukarıdaki kavramları kısaca hatırlatalım.

Tanım 1.5 Bir F fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında;

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0^+)$ mevcut
2. Her sınırlı $(0, c)$ aralığında $0 < j_1 < \dots < j_n < c$ şeklindeki sonlu sayıda j_i ($i = 1, 2, \dots, n$) noktasında sıçrama süreksizliğine sahip ise F fonksiyonuna $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli denir.

Örnek 1.35 Aşağıda verilen fonksiyonların her birinin verilen aralıkta parçalı sürekli olup olmadıklarını belirtiniz ve varsa sıçrama süreksizlik noktalarındaki sağ ve sol limitlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} a. F(x) &= \begin{cases} 2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ b. F(x) &= \begin{cases} 1-x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{x-2} & , \quad 2 < x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Çözüm 1.34 a. $x_0 = 1 \in [0, 2]$ kritik nokta olmak üzere,

$$F(1^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(1 + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \epsilon)^2 = 1,$$

$$F(1^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(1 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 = 2$$

$$\begin{aligned} F(1^+) &\neq F(1^-) \implies x_0 = 1 \text{ sıçrama süreksizlik noktası ve sonlu} \\ &\implies F, [0, 2] \text{ 'de parçalı sürekli.} \end{aligned}$$

b. $x_0 = 2 \in [1, 3]$ kritik nokta olmak üzere,

$$F(2^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(2 + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2 + \epsilon}{2 + \epsilon - 2} = \infty,$$

$$F(2^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(2 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1 - (2 - \epsilon) = -1$$

$$\begin{aligned} &\implies F(2^+) \text{ sonlu olmadığından } x_0 = 2 \text{ sıçrama süreksizlik noktası değil} \\ &\implies F, [1, 3] \text{ 'de parçalı sürekli değildir.} \end{aligned}$$

Tanım 1.6 $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x_0 \geq 0$ olmak üzere her $x > x_0$ sayısı için

$$e^{-\alpha x} |F(x)| \leq C, x \rightarrow \infty$$

veya

$$|F(x)| \leq Ce^{\alpha x}, x \rightarrow \infty$$

olacak şekilde $C > 0$ ve α sabit sayıları varsa $F(x)$ fonksiyonuna α üstel mertebeden bir fonksiyon denir. Buna göre, $F(x)$ fonksiyonunun α üstel mertebeden bir fonksiyon olması, $x \rightarrow \infty$ için $e^{-\alpha x} |F(x)|$ çarpımının sınırlı olması anlamına gelir. Ayrıca, bu tanıma göre $F(x)$ fonksiyonu α üstel mertebeden bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq Ce^{\alpha x} \\ \Rightarrow -Ce^{\alpha x} &\leq F(x) \leq Ce^{\alpha x} \\ \Rightarrow -C \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}} &\leq \frac{F(x)}{e^{\beta x}} \leq C \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}} \\ \Rightarrow -\frac{C}{e^{(\beta-\alpha)x}} &\leq \frac{F(x)}{e^{\beta x}} \leq \frac{C}{e^{(\beta-\alpha)x}} \end{aligned}$$

olduğundan $\beta - \alpha > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{C}{e^{(\beta-\alpha)x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{e^{(\beta-\alpha)x}} = 0$$

olur. Buradan da sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{e^{\beta x}} = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $F(x)$, α üstel mertebeden bir fonksiyon ise $\beta > \alpha$ olmak üzere $F(x)$ fonksiyonu β üstel mertebeden bir fonksiyondur.

Sonuç olarak,

F , üstel mertebeden bir fonksiyondur $\iff \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} |F(x)| = 0$ mevcut ve sonlu

dir.

a. $F(x) = e^{2x}$ fonksiyonu α üstel mertebeden bir fonksiyondur. Gerçekten,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2-\alpha)x} = 0,$$

$2 < \alpha$ için mevcut olduğundan $F(x)$ fonksiyonuna α üstel mertebeden bir fonksiyondur.

b. $F(x) = x^2$ fonksiyonu α üstel mertebeden bir fonksiyondur. Gerçekten,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\alpha x}} = 0,$$

$0 < \alpha$ için mevcut olduğundan $F(x)$ fonksiyonuna α üstel mertebeden bir fonksiyondur.

c. $F(x) = e^{3x^4}$ fonksiyonu α üstel mertebeden bir fonksiyon değildir. Gerçekten,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} e^{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^4(3 - \frac{\alpha}{x^3})} = \infty$$

olup $F(x)$ fonksiyonuna α üstel mertebeden bir fonksiyon değildir. Dolayısıyla, Laplace dönüşümü bulunamaz (daha fazla bilgi için bakınız:[13])

Lemma 1.6 $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu sınırlı ise bu fonksiyon herhangi bir $\alpha \geq 0$ sayısı için α üstel mertebeden bir fonksiyondur.

İspat. $C = \max_{x \geq 0} |F(x)|$ alınırsa $F(x)$ sınırlı olacağından bir $C > 0$ sayısı mevcut olur. $1 \leq e^{ax}$ olduğundan $x \geq 0$ olmak üzere $|F(x)| \leq Ce^{ax}$ olması için gerekli şartlar sağlanmış olur. Dolayısıyla, $F(x)$ fonksiyonuna α üstel mertebeden bir fonksiyondur. ■

Lemma 1.7 $F, G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları sırasıyla α ve β üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

1. $F + G, \max\{\alpha, \beta\}$ üstel mertebeden bir fonksiyon
2. $F \cdot G, \alpha + \beta$ üstel mertebeden bir fonksiyondur.

İspat. 1. $F, G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları sırasıyla α ve β üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |F(x) + G(x)| &\leq |F(x)| + |G(x)| \\ &\leq C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \\ &\leq \max\{C_1, C_2\} (e^{\alpha x} + e^{\beta x}) \\ &\leq 2 \max\{C_1, C_2\} e^{\max\{\alpha, \beta\}x} \end{aligned}$$

olacak şekilde $C_1 > 0, C_2 > 0$ sayıları mevcuttur. Dolayısıyla, $F + G, \max\{\alpha, \beta\}$ üstel mertebeden bir fonksiyondur.

2. $F, G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları sırasıyla α ve β üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |F(x) \cdot G(x)| &\leq C_1 e^{\alpha x} C_2 e^{\beta x} \\ &= C_1 C_2 e^{(\alpha + \beta)x} \end{aligned}$$

olacak şekilde $C_1 > 0, C_2 > 0$ sayıları mevcuttur. Dolayısıyla, $F \cdot G, \max \{\alpha, \beta\}$ üstel mertebeden bir fonksiyondur. ■

Örneğin, $F(x) = e^{5x} \sin 3x$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x} |F(x)| &= e^{-\alpha x} |e^{5x} \sin 3x| = e^{(5-\alpha)x} |\sin 3x| \\ &\leq 1 \cdot e^{(5-\alpha)x} = e^{(5-\alpha)x} \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha = 5$ için $e^{-5x} |F(x)|$ çarpımı sınırlı olduğundan, $F(x) = e^{5x} \sin 3x$ fonksiyonu üstel mertebeden bir fonksiyondur.

Şimdi Laplace dönüşümünün varlık teoremini vermeye hazırız.

Teorem 1.4 $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ parçalı sürekli ve α üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Her $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{F(x)\}(s)$ Laplace dönüşümü vardır.

İspat. $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ parçalı sürekli ve α üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Amacımız

$$\left| \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx \right| < \infty$$

integralinin mutlak yakınsak, yani yakınsak olduğunu göstermek olacaktır. Bunun için, Laplace dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx \right| &= \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} F(x) dx \right| \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} |F(x)| dx \\ &= \int_0^{x_0} e^{-sx} |F(x)| dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x_0}^r e^{-sx} |F(x)| dx \\ &\leq \int_0^{x_0} e^{-sx} |F(x)| dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x_0}^r C e^{\alpha x} e^{-sx} dx, C > 0 \\ &= \int_0^{x_0} e^{-sx} |F(x)| dx + C \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\alpha-s)r}}{\alpha-s} - \frac{e^{(\alpha-s)x_0}}{\alpha-s} \right) \\ &= \int_0^{x_0} |F(x)| e^{-sx} dx + C \frac{e^{(\alpha-s)x_0}}{s-\alpha} < \infty, s > \alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

integrali mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır. Böylece, $s > \alpha$ için $F(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır. Burada, $s \in \mathbb{C}$ olursa $\Re(s) > \alpha$ koşulu aranacaktır. ■

Uyarı 1.4 *Teorem 1.4'ün ispatı sırasında görüldüğü gibi*

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} |F(x)| dx < \infty$$

genelleştirilmiş integrali de yakınsaktır. Yani, Teorem 1.4'ün koşulları altında, $F(x)$ fonksiyonunun ilaveten $|F(x)|$ fonksiyonunun da Laplace dönüşümü vardır.

Uyarı 1.5 *Teorem 1.4'ün koşulları Laplace dönüşümünün varlığı için sadece yeter koşulları vermektedir. Fakat bu koşullar hiçbir şekilde gerek koşullar oluşturmamaktadır ve bir fonksiyonun Laplace dönüşümü, daha hafif şartlar altında var olabilir. Örneğin, yukarıda verdiğimiz $F(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon Teorem 1.4'ün parçalı sürekli koşulunu sağlamadığı halde*

$(x \rightarrow 0^+ \implies F(x) \rightarrow \infty \implies F(x) : \text{Sıçrama süreksizlik noktasına sahip değil})$ Laplace dönüşümü mevcuttur.

Teorem 1.4'ün koşullarından aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

1.

$$s \rightarrow \infty \implies \mathcal{L}\{F(x)\}(s) \rightarrow 0$$

dır.

2. $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu parçalı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} |e^{-sx} F(x)| dx &= \int_0^{x_0} e^{-sx} |F(x)| dx \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha} (1 - e^{-(s-\alpha)x_0}) \\ &\implies \int_0^{x_0} e^{-sx} F(x) dx \end{aligned}$$

integrali mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla, $\mathcal{L}\{F(x)\}(s)$ dönüşümü mevcut olduğundan

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

integrali mutlak yakınsaktır.

3.

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

integrali mutlak yakınsaktır. Gerçekten, Weierstrass M-testinden

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x_0} e^{-sx} F(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \right| &= \left| \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} |F(x)| dx \\ &= \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)x_0} \rightarrow 0, x_0 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olduğundan $s - \alpha > 0$ için $f(s)$ integrali düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.5 $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve sırasıyla α_1 ve α_2 üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Bu durumda, C_1 ve C_2 sabitleri için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\} &= C_1 \mathcal{L}\{F_1(x)\} + C_2 \mathcal{L}\{F_2(x)\} \\ &= C_1 f(s) + C_2 g(s) \end{aligned}$$

dir.

İspat. $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli olduğundan $C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)$ fonksiyonu da parçalı süreklidir. $x_0 = x_1 + x_2$, $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ve $C = |C_1| C_{1,1} + |C_2| C_{2,2}$ olsun. Buna göre, $\forall x > x_0$ için

$$\begin{aligned} |C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)| &\leq |C_1| |F_1(x)| + |C_2| |F_2(x)| \\ &\leq |C_1| C_{1,1} e^{\alpha_1 x} + |C_2| C_{2,2} e^{\alpha_2 x} \\ &\leq C e^{\alpha x} \end{aligned}$$

olduğundan $C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)$ fonksiyonu α üstel mertebeden bir fonksiyondur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} [C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)] dx \\
 &= C_1 \int_0^{\infty} e^{-sx} F_1(x) dx + C_2 \int_0^{\infty} e^{-sx} F_2(x) dx \\
 &= C_1 f(s) + C_2 g(s) \\
 &\Rightarrow \text{Laplace dönüşümü lineerdir.}
 \end{aligned}$$

■

Örnek 1.36 $F(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 1.35 Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(x)\} &= \mathcal{L}\{5x^3 - 6x^2 + 7\} \\
 &= 5\mathcal{L}\{x^3\} - 6\mathcal{L}\{x^2\} + 7\mathcal{L}\{1\} \\
 &= \frac{30}{s^4} - \frac{12}{s^3} + \frac{7}{s}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki Örnek 1.31 ve Örnek 1.32'yi Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğini kullanarak da rahatlıkla çözebiliriz. Biz burda ayrıntıları geçiyoruz.

Şimdi Laplace dönüşümünün birinci öteleme(kaydırma) özelliğini verelim.

Teorem 1.6

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax} F(x)\} = f(s - a)$$

dir.

İspat. Laplace dönüşümünün tanımından

$$\mathcal{L}\{e^{ax} F(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} F(x) dx = f(s - a)$$

olur. ■

Örnek 1.37 $\mathcal{L}\{e^{4x}x^4\}=?$

Çözüm 1.36

$$\mathcal{L}\{x^4\} = \frac{24}{s^5} \implies \mathcal{L}\{e^{4x}x^4\} = \frac{24}{(s-4)^5}.$$

Örnek 1.38 $\mathcal{L}\{e^{-3x}\sin 5x\}=?$

Çözüm 1.37

$$\mathcal{L}\{\sin 5x\} = \frac{5}{s^2 + 25} \implies \mathcal{L}\{e^{-3x}\sin 5x\} = \frac{5}{(s+3)^2 + 25}.$$

Uyarı 1.6 Laplace dönüşümü lineer olmasına rağmen iki fonksiyonun çarpımının Laplace dönüşümü, Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşit değildir. Yani,

$$\mathcal{L}\{F_1(x) \cdot F_2(x)\} \neq \mathcal{L}\{F_1(x)\} \cdot \mathcal{L}\{F_2(x)\}$$

dir. Örneğin, $\mathcal{L}\{e^{4x}x\} = \frac{1}{(s-4)^2}$, $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}\{e^{4x}\} = \frac{1}{s-4}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{e^{4x}x\} \neq \mathcal{L}\{x\} \mathcal{L}\{e^{4x}\}$$

dir.

Şimdi Laplace dönüşümünün ikinci öteleme(kaydırma) özelliğini verelim.

Teorem 1.7 $\mathcal{L}\{F_1(x)\} = f(s)$ ve $F_2(x) = \begin{cases} F_1(x-a) & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{F_2(x)\} = e^{-as}f(s)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F_2(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F_2(x) dx \\
 &= \int_0^a e^{-sx} F_2(x) dx + \int_a^{\infty} e^{-sx} F_2(x) dx \\
 &= \int_0^a e^{-sx} \cdot 0 dx + \int_a^{\infty} e^{-sx} F_2(x) dx \\
 &= \int_a^{\infty} e^{-sx} F_1(x-a) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(a+u)} F_1(u) du \\
 &= e^{-as} f(s).
 \end{aligned}$$

■

Örnek 1.39 $G(x) = \begin{cases} \sin(x-\pi) & , \quad x > \pi \\ 0 & , \quad x < \pi \end{cases}$ ise $\mathcal{L}\{G(x)\} = ?$

Çözüm 1.38

$$\mathcal{L}\{\sin x\} = \frac{1}{s^2 + 1} \implies \mathcal{L}\{G(x)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

olur.

Şimdi de Laplace dönüşümünün skala (ölçek) değiştirme özelliğini verelim.

Teorem 1.8

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) \implies \mathcal{L}\{F(ax)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(ax)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F(ax) dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} F(u) du \\
 &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), a > 0
 \end{aligned}$$

olur. ■

Örneğin, $\mathcal{L}\{e^{5x}\}$ 'i yukarıdaki teorem yardımıyla elde edelim. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^x\} &= \frac{1}{s-1} = f(s) \implies \mathcal{L}\{e^{5x}\} = \frac{1}{5} \frac{1}{\left(\frac{s}{5}-1\right)} = \frac{1}{5} f\left(\frac{s}{5}\right) \\
 \implies \mathcal{L}\{e^{5x}\} &= \frac{1}{s-5}
 \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 1.7 $F(x), x > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tektir. Yani, F_1 ve F_2 Laplace dönüşümleri olan iki fonksiyon iseler ise tanım gereği

$$\mathcal{L}\{F_1\} = \mathcal{L}\{F_2\} \implies F_1 = F_2$$

dir.

Aşağıdaki formüller bize yüksek mertebeden türevlerin Laplace dönüşümünü vermektedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F'(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F'(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-sx} F'(x) dx \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[(F(x) e^{-sx})_0^r + s \int_0^r e^{-sx} F(x) dx \right] \\
 &= -F(0) + s\mathcal{L}\{F(x)\} = s\mathcal{L}\{F(x)\} - F(0) \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, $s > 0$ iken $x \rightarrow \infty$ için $e^{-sx} F(x) \rightarrow 0$ olmalıdır.

Ayrıca, (1.36) formülünü F'' fonksiyonu için uygularsak ve benzer olarak diğer türev fonksiyonları için de uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F''(x)\} &= s^2\mathcal{L}\{F(x)\} - [F'(0) + sF(0)] \\ \mathcal{L}\{F'''(x)\} &= s^3\mathcal{L}\{F(x)\} - [F''(0) + sF'(0) + s^2F(0)] \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}\{F^{(n)}(x)\} &= s^n\mathcal{L}\{F(x)\} - [F^{(n-1)}(0) + sF^{(n-2)}(0) + \dots + s^{n-1}F(0)] \\ &= s^n\mathcal{L}\{F(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [F^{(k)}(0)], n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

formülleri bulunur.

Örneğin, $F(x) = \cos x$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{s}{s^2+1}$ ve $(\cos x)'' = -\cos x$ olup

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(\cos x)''\} &= \mathcal{L}\{-\cos x\} \\ &= s^2 \frac{s}{s^2+1} - \sin 0 - s \cos 0 \\ &= -\frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.9

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) \implies \mathcal{L}\{x^n F(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [f(s)]$$

dir.

İspat. (1.34) denkleminin n defa s ye göre türevini alırsak

$$\begin{aligned}f'(s) &= (-1)^1 \int_0^\infty e^{-sx} x F(x) dx = \mathcal{L}\{x F(x)\} \\ \implies \mathcal{L}\{x F(x)\} &= (-1)^1 f'(s) \\ f''(s) &= (-1)^2 \int_0^\infty e^{-sx} x^2 F(x) dx = \mathcal{L}\{x^2 F(x)\} \\ \implies \mathcal{L}\{x^2 F(x)\} &= (-1)^2 f''(s) \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(s) &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-sx} x^n F(x) dx = \mathcal{L}\{x^n F(x)\} \\ \implies \mathcal{L}\{x^n F(x)\} &= (-1)^n f^{(n)}(s)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, istenen sonuç elde edilmiş olur. ■

Örneğin, $F(x) = e^{5x}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}\{e^{5x}\} = \frac{1}{s-5}$ olup

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^3 e^{5x}\} &= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} \left[\frac{1}{s-5} \right] \\ &= \frac{6}{(s-5)^4}\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.40

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) \implies \mathcal{L}\{u^x F(x)\} = f(s - \ln u), u > 0$$

dir. Gösteriniz.

Çözüm 1.39

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u^x F(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u^x F(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{x \ln u} F(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x(s - \ln u)} F(x) dx \\ &= f(s - \ln u), u > 0\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümünü verelim.

Teorem 1.10 $F(x)$ fonksiyonu periyodik ve periyodu P olsun. Yani, $F(x)$ 'nin tanımlı olduğu aralık üzerinde yer alan her x için

$$F(x + P) = F(x), P > 0$$

bağıntısı gerçeklensin. Bu durumda,

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = \frac{\int_0^P e^{-sx} F(x) dx}{1 - e^{-sP}}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \\
&= \int_0^P e^{-sx} F(x) dx + \int_P^{2P} e^{-sx} F(x) dx + \int_{2P}^{3P} e^{-sx} F(x) dx + \dots \\
&= \int_0^P e^{-sx} F(x) dx + \underbrace{\int_P^{2P} e^{-sx} F(x) dx}_{x \rightarrow y+P} + \underbrace{\int_{2P}^{3P} e^{-sx} F(x) dx}_{x \rightarrow y+2P} + \dots \\
&= \int_0^P e^{-sx} F(x) dx + \int_0^P e^{-s(y+P)} F(y+P) dy \\
&\quad + \int_0^P e^{-s(y+2P)} F(y+2P) dy + \dots \\
&= \int_0^P e^{-sx} F(x) dx + e^{-sP} \int_0^P e^{-sy} F(y) dy \\
&\quad + e^{-2sP} \int_0^P e^{-sy} F(y) dy + \dots \\
&= \int_0^P e^{-sx} F(x) dx \underbrace{[1 + e^{-sP} + e^{-2sP} + \dots]}_{\frac{1}{1-e^{-sP}}}, |e^{-sP}| < 1 \\
&= \frac{\int_0^P e^{-sx} F(x) dx}{1 - e^{-sP}}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örneğin,

$$H(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

ve

$$H(x + 2\pi) = H(x)$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(x)\} &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-sx} \sin x dx}{1 - e^{-2\pi s}} \\ &= \frac{\left[\frac{e^{-sx}(-s \sin x - \cos x)}{s^2 + 1} \right]_0^\pi}{1 - e^{-2\pi s}} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)}\end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıdaki teorem bir fonksiyonunun integralinin Laplace dönüşümünü vermektedir.

Teorem 1.11

$$\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s) \implies \mathcal{L}\left\{\int_0^x F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

dir.

İspat. Öncelikle verilen bir $F(x)$ fonksiyonunun integrali

$$G(x) = \int_0^x F(u) du$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$G'(x) = F(x)$$

ve

$$G(0) = 0$$

dır. Buradan (1.36) uyarınca

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{G'(x)\} &= s\mathcal{L}\{G(x)\} - G(0) \\ \implies \mathcal{L}\{F(x)\} &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^x F(u) du\right\} \\ \implies \mathcal{L}\left\{\int_0^x F(u) du\right\} &= \frac{f(s)}{s}\end{aligned}$$

olur. ■

Örneğin,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= e^{-3x} \implies f(s) = \frac{1}{s+3} \\
 \mathcal{L} \left\{ \int_0^x e^{-3u} du \right\} &= \frac{1}{3} \mathcal{L} \{1 - e^{-3x}\} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right) \\
 &= \frac{1}{s(s+3)} \\
 &= \frac{\mathcal{L} \{e^{-3x}\}}{s}
 \end{aligned}$$

olur.

Buraya kadar hep $x > 0$ için bir F fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmaya çalıştık. Şimdi bu problemin tersini düşünelim. Fonksiyonunun Laplace dönüşümü $f(s)$ belli olsun ve bu dönüşüme uyan F fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Yani,

$$\mathcal{L} \{F(x)\} = f(s) \implies \mathcal{L}^{-1} \{f(s)\} = F(x)$$

olup $\mathcal{L}^{-1} \{f(s)\}$ 'ye $f(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir.

Aşağıdaki teorem bir $f(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünün tekliğini garanti eder.

Teorem 1.12 $F_1(x)$ ve $F_2(x)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve α üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{L} \{F_1(x)\} = \mathcal{L} \{F_2(x)\} \implies F_1(x) = F_2(x)$$

dir.

1. Ters Laplace dönüşümü lineerdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\} &= C_1 f_1(s) + C_2 f_2(s) \implies \\
 \mathcal{L}^{-1} \{C_1 f_1(s) + C_2 f_2(s)\} &= C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x) \\
 &= C_1 \mathcal{L}^{-1} \{f_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1} \{f_2(s)\}
 \end{aligned}$$

olur.

Örneğin,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s-1}-9\frac{s}{s^2+16}\right\} &= 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-9\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} \\ &= 10e^x-9\cos 4x\end{aligned}$$

bulunur.

2. Ters Laplace dönüştürümünün skala (ölçek) değıştirme özelliğı vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(x)\} &= f(s) \implies \\ \mathcal{L}\left\{F\left(\frac{x}{a}\right)\right\} &= \int_0^\infty e^{-sx}F\left(\frac{x}{a}\right)dx, a > 0 \\ &= a \int_0^\infty e^{-asu}F(u)du \\ &= a \int_0^\infty e^{-ast}F(t)dt \\ &= af(as) \\ \implies \mathcal{L}^{-1}\{f(as)\} &= \frac{1}{a}F\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

olur.

3. Ters Laplace dönüştürümünün birinci öteleme(kaydırma) özelliğı vardır. Gerçekten, Laplace dönüştürümünün birinci öteleme(kaydırma) özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ax}F(x)\} &= f(s-a) \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} &= e^{ax}F(x) = e^{ax}\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örneğin,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} &= \cos 3x \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+9}\right\} \\ &= e^x \cos 3x + \frac{1}{3}e^x \sin 3x\end{aligned}$$

olur.

4. Ters Laplace dönüşümünün ikinci öteleme(kaydırma) özelliği vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} &= F(x) \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} &= \begin{cases} F(x-a) & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}\end{aligned}$$

dir.

Örneğin,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} &= \sin 4x \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4e^{-5s}}{s^2+16}\right\} &= \begin{cases} \sin 4(x-5) & , \quad x > 5 \\ 0 & , \quad x < 5 \end{cases}\end{aligned}$$

olur.

5. Ters Laplace dönüşümünün türevi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} &= F(x) \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}[f(s)]\right\} &= (-1)^n x^n F(x).\end{aligned}$$

Örneğin,

$$f(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)\right\} = F(x)$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}-xF(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)\right]\right\} \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right\} \\ &= -(1 - e^x) \\ \implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} &= \frac{1 - e^x}{x}\end{aligned}$$

elde edilir.

6. Ters Laplace dönüşümünün integralii aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} &= F(x) \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} &= \int_0^x F(u) du.\end{aligned}$$

Örneğin,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} &= \frac{1}{2} \sin 2x \implies \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} &= \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2u du \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)\end{aligned}$$

olur.

Son olarak konvolüsyon kavramını ve özelliklerini verip bu bölümü tamamlayalım.

Tanım 1.7 $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları her bir sonlu $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(\theta) G(x - \theta) d\theta$$

ile tanımlanan $(F * G)(x)$ fonksiyonuna $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu adı verilir.

Örneğin, $\sin x$ ile $\cos x$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$\begin{aligned}(\sin x) * (\cos x) &= \int_0^x \sin \theta \cos (x - \theta) d\theta \\ &= \int_0^x \sin \theta (\cos x \cos \theta + \sin x \sin \theta) d\theta \\ &= \cos x \int_0^x \sin \theta \cos \theta d\theta + \sin x \int_0^x \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{x \sin x}{2}\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.41

$$\forall z, \omega \geq 0, F(x) = x^z, G(\mu) = x^\omega \implies (F * G)(x) = ?$$

Çözüm 1.40

$$\begin{aligned}
 (F * G)(x) &= x^z * x^\omega \\
 &= \int_0^x \theta^z (x - \theta)^\omega d\theta, \theta = x\mu \\
 &= x^{z+\omega+1} \int_0^1 \mu^z (1 - \mu)^\omega d\mu \\
 &= x^{z+\omega+1} \beta(z+1, \omega+1) \\
 &= x^{z+\omega+1} \frac{\Gamma(z+1) \Gamma(\omega+1)}{\Gamma(z+\omega+2)}
 \end{aligned}$$

olur.

Konvolüsyon işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Konvolüsyon işleminin değişme özelliği vardır. Gerçekten, konvolüsyon tanımından

$$\begin{aligned}
 (F * G)(x) &= \int_0^x F(\theta) G(x - \theta) d\theta, x - \theta = u \\
 &= - \int_x^0 F(x - u) G(u) du \\
 &= \int_0^x G(u) F(x - u) du \\
 &= (G * F)(x)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Konvolüsyon işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçekten, konvolüsyon

tanımından

$$\begin{aligned}
(F * (G * H))(x) &= \int_0^x F(\theta) (G * H)(x - \theta) d\theta \\
&= \int_0^x F(\theta) \left[\int_0^{x-\theta} G(\mu) H(x - \theta - \mu) d\mu \right] d\theta, \theta + \mu = \sigma \\
&= \int_0^x F(\theta) \left[\int_\theta^x G(\sigma - \theta) H(x - \sigma) d\sigma \right] d\theta \\
&= \int_0^x \left[\int_\theta^x F(\theta) G(\sigma - \theta) H(x - \sigma) d\sigma \right] d\theta, \\
&\quad D = \{(\sigma, \theta) : \theta \leq \sigma \leq x, 0 \leq \theta \leq x\} \\
&= \int_0^x \left[\int_0^\sigma F(\theta) G(\sigma - \theta) H(x - \sigma) d\theta \right] d\sigma \\
&= \int_0^x \left[\int_0^\sigma F(\theta) G(\sigma - \theta) d\theta \right] H(x - \sigma) d\sigma \\
&= \int_0^x (F * G)(\sigma) H(x - \sigma) d\sigma \\
&= ((F * G) * H)(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

3. Konvolüsyon işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Gerçekten, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere konvolüsyon tanımı uyarınca

$$\begin{aligned}
(F * (aG * bH))(x) &= \int_0^x F(\theta) (aG * bH)(x - \theta) d\theta \\
&= a \int_0^x F(\theta) G(x - \theta) d\theta + b \int_0^x F(\theta) H(x - \theta) d\theta \\
&= a(F * G)(x) + b(F * H)(x) \\
&= (a(F * G) + b(F * H))(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$c(F * G)(x) = (cF * G)(x) = (F * cG)(x)$$

dir. Bu özellik tanımdan açıktır.

Aşağıdaki konvolüsyon teoremi Laplace dönüşümünde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Teorem 1.13 $F_1(x)$ ve $F_2(x)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(F_1 * F_2)(x)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^x F_1(\theta) F_2(x - \theta) d\theta\right\} \\ &= \mathcal{L}\{F_1(x)\} \mathcal{L}\{F_2(x)\} \\ &= f_1(s) f_2(s) \end{aligned}$$

dir. Yani, iki fonksiyonunun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü, her birinin Laplace dönüşümünün çarpımına eşittir.

İspat. Öncelikle $F_1 * F_2$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüne sahip olduğunu gösterelim. Bunun için, $F_1(x)$ ve $F_2(x)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olduklarından integral hesabın temel teoremi gereğince $F_1 * F_2$ fonksiyonu da parçalı sürekli dir. Diğer taraftan, $x_0 = x_1 + x_2$, α_1, α_2 sabit sayılar ve $C = C_1 C_2$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} |(F_1 * F_2)(x)| &= \left| \int_0^x F_1(\theta) F_2(x - \theta) d\theta \right| \\ &\leq \int_0^x |F_1(\theta)| |F_2(x - \theta)| d\theta \\ &\leq C_1 C_2 \int_0^x e^{\alpha_1 \theta} e^{\alpha_2 (x - \theta)} d\theta \\ &\leq C_1 C_2 \int_0^x e^{(\alpha_1 - \alpha_2) \theta} e^{\alpha_2 x} d\theta \\ &= \begin{cases} C x e^{\alpha_2 x} & , \quad \alpha_1 = \alpha_2 \\ C \frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} & , \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \end{cases} \end{aligned}$$

olacağından her iki durumda da $F_1 * F_2$ fonksiyonu üstel mertebededir. Dolayısıyla, $F_1 * F_2$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur.

Ayrıca, Laplace dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx} \left[\int_0^x F_1(\theta) F_2(x-\theta) d\theta \right] dx \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-sx} F_1(\theta) F_2(x-\theta) d\theta \right] dx, x-\theta = u, \theta = v \\
D_1 &= \{(x, \theta) : 0 \leq x, 0 \leq \theta \leq x\} \implies D_2 = \{(u, v) : 0 \leq u, 0 \leq v\} \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-su} F_2(u) du \right] e^{-sv} F_1(v) dv \\
&= \int_0^\infty e^{-sv} F_1(v) dv \int_0^\infty e^{-su} F_2(u) du \\
&= \mathcal{L}\{F_1(x)\} \mathcal{L}\{F_2(x)\}
\end{aligned}$$

olur. ■

Uyarı 1.8

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)(x)\} &= f_1(s) f_2(s) \iff \\
\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s) f_2(s)\} &= (F_1 * F_2)(x) = \int_0^x F(\theta) G(x-\theta) d\theta
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.42

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=?$$

Çözüm 1.41

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right\}, \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} &= \sin x, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos x \\
\implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \int_0^x \sin \theta \cos(x-\theta) d\theta = \frac{x \sin x}{2}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.43

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 (s-5)} \right\} = ?$$

Çözüm 1.42

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 (s-5)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-5} \right\}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} &= x, \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-5} \right\} = e^{5x} \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 (s-5)} \right\} &= \int_0^x \theta e^{5(x-\theta)} d\theta = \frac{(e^{5x} - 5x - 1)}{25} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.44

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} (s-1)} \right\} = ?$$

Çözüm 1.43

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} (s-1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1} \right\}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}, \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} = e^x \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} (s-1)} \right\} &= \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{\theta}} 2e^{(x-\theta)} d\theta, u = \sqrt{\theta} \\ &= \frac{2e^x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du \\ &= e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.45 Aşağıdaki bağıntıların doğru olduğunu gösteriniz:

1.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2} \right\} = \int_0^x \int_0^u F(v) dv du,$$

2.

$$\int_0^x \int_0^u F(v) dv du = \int_0^x (x-v) F(v) dv.$$

Çözüm 1.44 1.

$$G(x) = \int_0^x \int_0^u F(v) dv du = \int_0^x \left[\int_0^u F(v) dv \right] du$$

olsun. Burada her iki tarafın türevini alırsak,

$$G'(x) = \int_0^x F(v) dv, \quad G''(x) = F(x)$$

olur. Sonra, $G(0) = G'(0) = 0$ olduğunu da dikkate alıp her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G''(x)\} &= \mathcal{L}\{F(x)\} \\ \implies s^2 g(s) - sG(0) - G'(0) &= f(s) \\ \implies s^2 g(s) &= f(s) \\ \implies g(s) &= \frac{f(s)}{s^2} \\ \implies G(x) = \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^x \int_0^u F(v) dv du \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, yukarıdaki bu durum

$$\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x) dx \cdots dx dx = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\}$$

şeklinde de genişletilebilir. Biz burada ayrıntıları geçiyoruz.

2. Önce konvolüsyon teoremini, sonra yukarıda elde ettiğimiz bağıntıyı kullanırsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-v) F(v) dv\right\} &= \mathcal{L}\{x\} \mathcal{L}\{F(x)\} = \frac{f(s)}{s^2} \\ \implies \int_0^x (x-v) F(v) dv &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^x \int_0^u F(v) dv du \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, yukarıdaki bu durum

$$\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x) dx \dots dx dx = \int_0^x \frac{(x-v)^{n-1}}{(n-1)!} F(v) dv$$

şeklinde de genişletilebilir. Biz burada ayrıntıları geçiyoruz.

Uyarı 1.9 Laplace dönüşümü ile ilgili daha fazla bilgi ve uygulama için bakınız:[13],[14],[15].

Kaynakça

- [1] H. Julian. Gamma: Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, 2017.
- [2] J. P. Hannah. Identities for the Gamma and Hypergeometric functions: An overview from Euler to the present. Master of Science Thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2013.
- [3] B. Başar. Yüksek Matematik Cilt I. Üniversite Kitabevi, İzmir, 1993.
- [4] B. Başar. Yüksek Matematik Cilt II. Birsen Kitabevi, İstanbul, 1996.
- [5] F. Gürbüz. Variable Exponent Vanishing Morrey Type Spaces on Unbounded Domains. Gürbüz, F. (Ed.), Mathematical Analysis and its Applications, 106-162. CRC Press, Boca Raton, FL, 2025.
- [6] A. Altın. Uygulamalı Matematik, Gazi Kitapevi, Ankara, 2011.
- [7] Y. Sökmen. Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ve uygulamaları. Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir, 2012.
- [8] M. Balcı. Matematik Analiz 2. Palme Yayınevi, Ankara, 2021.
- [9] G. Mittag-Leffler. Sm la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. CR Acad. Sci. Paris 137(1903):554-558.
- [10] A. Wiman. Uber den fundamental Satz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$. Acta Math 29(1905): 191–201.
- [11] P. Humbert, R. Agarwal. Sur la fonction de mittag-leffler et quelquesunes de ses généralisations. Bull. Sci. Math 77 (1953): 180- 185.
- [12] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. Rogosin. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2020.

- [13] M. Kandemir. Diferansiyel Denklemler. Pegem Akademi, Ankara, 2015.
- [14] C. Cerit. Çözümlü Diferansiyel Denklemler Problemleri. Beta Yayınevi, İstanbul, 2000.
- [15] E. Hasanov, G. Uzgören, A. Büyükaksoy. Diferansiyel Denklemler Teorisi. Papatya Yayıncılık, İstanbul, 2002.

Özel Fonksiyonlar

Yazar / Editör:

Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ



Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ

Yazarımız 2 Nisan 1984 tarihinde Ayvalık/Balıkesir’de dünyaya geldi. İlk, orta, lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 2008 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden Lisans derecesini aldı. 2011 ve 2015 yıllarında yine Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde sırasıyla Yüksek Lisans ve Doktora derecelerini aldı. 2019 yılında Doçent oldu. 2017-2023 yılları arasında Hakkâri Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde öğretim üyesi olarak çalıştı. 10 Nisan 2023 itibariyle Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümünde öğretim üyesi olarak çalışmaya başlamış ve yine aynı bölümde 08.08.2024 yılı itibariyle de profesör olmuştur. Yazarın uluslararası dergilerde ve kitaplarda pek çok çalışması, editörlükleri ve hakemlikleri bulunmaktadır. Ayrıca yazarımız iki ödüle de layık görülmüştür. Bunlar, "İksad Bilim Ödülü-2019 ve Hakkari Üniversitesi Bilim Akademik Performans Birincilik Ödülü-2022" dür.